

**Phương pháp đặt ẩn phụ phương trình
có chứa tam thức bậc hai ở trong căn**

Vũ Hồng Phong (GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

(Ý tưởng bài viết: Dựa vào phép thế Ô-le trong Tích Phân)

Đặt ẩn phụ là một phương pháp rất hay giúp ta giải quyết được nhiều phương trình (PT) vô tỉ. Bài viết này xin giới thiệu tới các bạn cách giải quyết một số dạng phương trình có chứa tam thức bậc hai ở trong căn khá thú vị và hữu ích.

dạng 1: Phương trình có chứa

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ với } a > 0$$

cách giải: Đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + t$

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$(2x+1)(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{16x+153}{16x-45} = 0$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2+1} = -x+t \Leftrightarrow \begin{cases} -x+t \geq 0 \\ x^2+1 = (t-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+t \geq 0 \\ 2xt = t^2 - 1 \end{cases} (*)$$

Dễ thấy $t = 0$ không thỏa mãn (*)

$$\text{Khi } t \neq 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+t^2}{2t} \geq 0 \\ x = \frac{t^2-1}{2t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x = \frac{t^2-1}{2t} \end{cases} (**)$$

thay vào PT đã cho được:

$$\left(\frac{t^2-1}{t} + 1\right)t + \frac{8 \cdot \frac{t^2-1}{2t} + 153}{8 \cdot \frac{t^2-1}{2t} - 45} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 + \frac{8t^2 + 153t - 8}{8t^2 - 45t - 8} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + t - 1)(8t^2 - 45t - 8) + 8t^2 + 153t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^4 - 37t^3 - 53t^2 + 190t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-2)(t-5)(8t+19) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 2 \text{ hoặc } t = 5 \text{ hoặc } t = \frac{-19}{8}$$

Ta loại $t = 0, t = \frac{-19}{8}$ còn $t = 2$ và $t = 5$

thay vào (**) ta được $x = \frac{3}{4}; x = \frac{12}{5}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = \frac{3}{4}; x = \frac{12}{5}$

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$16x^3 + (8x^2 - 1)\sqrt{4x^2 + 1} = \frac{15}{16x + 9}$$

Lời giải

Điều kiện $x \neq \frac{-9}{16}$

PT đã cho tương đương với PT

$$32x^3 + (16x^2 - 2)\sqrt{4x^2 + 1} = \frac{30}{16x + 9} (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned}(2x + \sqrt{4x^2 + 1})^3 &= 8x^3 + 12x^2\sqrt{4x^2 + 1} \\ &+ 6x(4x^2 + 1) + (4x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1} \\ &= 32x^3 + 6x + (16x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}VT(*) &= 32x^3 + 6x + (16x^2 + 1)\sqrt{4x^2 + 1} \\ &- 3(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \\ &= (2x + \sqrt{4x^2 + 1})^3 - 3(2x + \sqrt{4x^2 + 1})\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } 2x + \sqrt{4x^2 + 1} = t \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 1} = t - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2x \geq 0 \\ 4x^2 + 1 = (t - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2x \geq 0 \\ 4tx = t^2 - 1 \end{cases} \quad (1)$$

+ Dễ thấy $t = 0$ không thoả mãn (1)

+ Xét $t \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+t^2}{2t} \geq 0 \\ x = \frac{t^2 - 1}{4t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x = \frac{t^2 - 1}{4t} \end{cases}$$

Khi này PT(*) trở thành

$$\begin{aligned}t^3 - 3t &= \frac{30}{16 \cdot \frac{t^2 - 1}{4t} + 9} \\ \Leftrightarrow t^3 - 3t &= \frac{30t}{4t^2 + 9t - 4} \\ \Leftrightarrow t^2 - 3 &= \frac{30}{4t^2 + 9t - 4} \quad (\text{do } t \neq 0) \\ \Leftrightarrow (t^2 - 3)(4t^2 + 9t - 4) &= 30 \\ \Leftrightarrow 4t^4 + 9t^3 - 16t^2 - 27t - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)(t + 3)(4t^2 + 5t + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \\ 4t^2 + 5t + 3 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Xét phương trình $4t^2 + 5t + 3 = 0$

có $\Delta < 0$ nên nó vô nghiệm

Do $t > 0$ nên ta chỉ lấy $t = 2$

-Với $t = 2$ thay vào (1) ta được $x = \frac{3}{8}$

Vậy PT(*) có 1 nghiệm $x = \frac{3}{8}$

dạng 2: Phương trình có chứa

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{với } c > 0$$

cách giải:

Khi $x \neq 0$ đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1}\right)^3 = \frac{11x^3 + 70x^2}{3}$$

Lời giải

+ Dễ thấy $x = 0$ không thoả mãn PT đã cho

+ Xét $x \neq 0$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} = tx - 1$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ \frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = t^2x^2 - 2tx + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ 3t^2x^2 - 7x^2 = 6tx + 2x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} tx - 1 \geq 0 \\ (3t^2 - 7)x = 6t + 2 \end{cases} \quad (1) \quad (\text{do } x \neq 0)\end{aligned}$$

$$\text{Dễ thấy khi } 3t^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$$

không thoả mãn (1)

Khi $t \neq \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t + 2}{3t^2 - 7} \\ t \cdot \frac{6t + 2}{3t^2 - 7} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t+2}{3t^2-7} \\ \frac{3t^2+2t+7}{3t^2-7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6t+2}{3t^2-7} \\ t < -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ t > \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases} \quad (2)$$

Với cách đặt trên thay vào PT đã cho ta được

$$\begin{aligned} (1+tx-1)^3 &= \frac{11x^3+70x^2}{3} \\ \Leftrightarrow t^3x^3 &= \frac{11x+70}{3} \cdot x^2 \\ \Leftrightarrow 3t^3x &= 11x+70 \\ \Leftrightarrow 3t^3 \cdot \frac{6t+2}{3t^2-7} &= 11 \cdot \frac{6t+2}{3t^2-7} + 70 \\ \Leftrightarrow 3(6t+2)t^3 &= 11(6t+2) + 70(3t^2-7) \\ \Leftrightarrow 18t^4 + 6t^3 - 210t^2 - 66t + 468 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6(t-3)(t+2)(3t^2+4t-13) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-2 \\ 3t^2+4t-13=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-2 \\ t = \frac{-2 \pm \sqrt{43}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

đổi chiều điều kiện của t ở (2) ta loại

$$t = \frac{-2 + \sqrt{43}}{3}$$

Với t còn lại thay vào (2) ta được

$$x=1; x=-2; x = \frac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}}$$

Vậy PT đã cho có 3 nghiệm

$$x=1; x=-2; x = \frac{-3-3\sqrt{43}}{13+2\sqrt{43}}$$

dạng 3: Phương trình có chứa

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

cách giải: Khi $x \neq x_1$

$$\text{đặt } \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)t$$

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\frac{6x^2+17x+11}{2+\sqrt{(x+1)(6x+11)}} = \frac{27}{28}x + \frac{41}{14}$$

Lời giải.

Để thấy $x=-1$ không là nghiệm của phương trình đã cho

Với $x \neq -1$ đặt

$$\sqrt{(x+1)(6x+11)} = (x+1)t \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(6x+11) = (x+1)^2 t^2$$

$$\Rightarrow 6x+11 = (x+1)t^2$$

$$\Rightarrow (t^2-6)x = 11-t^2 \quad (2)$$

Để thấy $t = \pm\sqrt{6}$ không thỏa mãn (2)

$$\text{Với } t \neq \pm\sqrt{6} \text{ suy ra } x = \frac{11-t^2}{t^2-6} \quad (3)$$

thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{(x+1)(6x+11)} = \frac{5t}{t^2-6} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t > \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < t \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\left(\frac{5t}{t^2-6}\right)^2}{2+\frac{5t}{t^2-6}} = \frac{27}{28} \cdot \frac{11-t^2}{t^2-6} + \frac{41}{14}$$

$$\Leftrightarrow 700t^2 = (55t^2-195)(2t^2+5t-12)$$

$$\Leftrightarrow 140t^2 = (11t^2-39)(2t^2+5t-12)$$

$$\Leftrightarrow 22t^4 + 55t^3 - 350t^2 - 195t + 468 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-3)(22t^2+143t+156) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \\ t = \frac{-143 \pm \sqrt{6721}}{44} \end{cases}$$

Kiểm tra điều kiện ở (4) ta lấy $t=3$ và

$$t = \frac{-143 + \sqrt{6721}}{44}$$

Thay các giá trị t vào (3) ta được $x = \frac{2}{3}$

$$\text{và } x = \frac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}}$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = \frac{2}{3}$ và

$$x = \frac{286\sqrt{6721} - 5874}{15554 - 286\sqrt{6721}}$$

Ta thử sức thêm với một phương trình phức tạp xem khả năng của cách đặt ẩn phụ khi này chuyển từ tìm nghiệm xấu sang tìm nghiệm đẹp như thế nào nhé!

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})}}{x+1} + \frac{3x+\sqrt{2}}{x+1} \left(\frac{6x+21-5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-12} \right) = -1$$

Lời giải.

Do $x \neq -1$ đặt

$$\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})} = (x+1)t \geq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow (x+1)(3x+\sqrt{2}) = (x+1)^2 t^2$$

$$\Rightarrow 3x + \sqrt{2} = (x+1)t^2$$

$$\Rightarrow (t^2 - 3)x = \sqrt{2} - t^2 \quad (2)$$

Dễ thấy $t = \pm\sqrt{3}$ không thỏa mãn (2)

$$\text{Với } t \neq \pm\sqrt{3} \text{ suy ra } x = \frac{\sqrt{2} - t^2}{t^2 - 3} \quad (3)$$

thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{(x+1)(3x+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}-3)t}{t^2-3} \geq 0$$

bài tập

$$1) 4x^3 + 5x + (4x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 1} = \frac{891}{105 - 41x}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} t < -\sqrt{3} \\ 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases} \quad (4)$$

Từ cách đặt có $\frac{3x+\sqrt{2}}{x+1} = t^2$

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{(x+1)t}{x+1} + t^2 \left(\frac{6 \frac{\sqrt{2}-t^2}{t^2-3} + 21-5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-12} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow t+1+t^2 \left(\frac{(15-5\sqrt{2})t^2 + 21\sqrt{2}-63}{(4\sqrt{2}-12)(t^2-3)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(4\sqrt{2}-12)(t^2-3) + (15-5\sqrt{2})t^4 + (21\sqrt{2}-63)t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (15-5\sqrt{2})t^4 + (4\sqrt{2}-12)t^3$$

$$+ (25\sqrt{2}-75)t^2 + (36-12\sqrt{2})t + 36-12\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+2)$$

$$\times ((15-5\sqrt{2})t^2 + (9\sqrt{2}-27)t + 6\sqrt{2}-18) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \\ t = \frac{9 \pm \sqrt{201}}{10} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện (4) ta chỉ lấy $t = 1$ và

$$t = -2. \text{ Suy ra } x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}; x = \sqrt{2}-4$$

là tất cả các nghiệm của PT đã cho

$$2) 10 + x^2 \left(\sqrt{x^2 + 5} - x \right)^3 = \frac{20 + 25x}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$3) 3 \left(2 + \sqrt{4 - 2x - x^2} \right)^2 = 5x^3 + 22x^2$$

$$4) 10 + \left(\sqrt{x^2 + 5} - x \right)^3 = \frac{20 + 25x^2}{x + \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$5) \left(2x + \sqrt{4x^2 + x + 2} \right)^3 = \frac{315x + 82}{19}$$

$$6) \sqrt{(7x - 6)(x - 1)} = x^2 + \frac{13}{30}x - \frac{7}{5}$$

$$7) \frac{8x^3 - 141x^2 - 409x}{\left(3 + \sqrt{12x^2 - 4x + 9} \right)^3} = \frac{105}{4}$$

$$8) \frac{366x^2 + 635x + 114}{(6x + 1)\sqrt{6x^2 + 17x + 11}} = 28$$

$$9) (2x^2 - 5x - 2)\sqrt{6x^2 - 17x + 11} = (2x - 2)^2$$

$$10) 4\sqrt{3x^2 + x + 4} - 15x - 8 = \frac{2x^4 - 14x^3}{\left(\sqrt{3x^2 + x + 4} - 2 \right)^2}$$

$$11) 2x^3 + (2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} = \frac{24x - 13}{5}$$

$$12) \left(2 + \sqrt{2x^2 + 3x + 4} \right)^3 + \frac{581x^4}{47} = \frac{8493x^3}{94} - \frac{7425x^2}{94}$$

$$13) \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 5} - x \right)^2 + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5} - x + 3} = \frac{4204 + 3175x - 1025x^2}{504}$$

$$14) \frac{13}{28} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{x - 1} \right)^3 + \frac{65}{7} = \frac{31\sqrt{2x^2 - x - 1}}{4x - 4} - x$$

$$15) \left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} \right)^3 + x^2 \sqrt{\frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1} \\ = \frac{-230}{27}x^3 + \frac{373}{27}x^2 + \frac{640}{27}x$$

Các phương trình trong bài viết chưa được gọn và đẹp.

Hì vọng các bạn tự sáng tác được ra các phương trình dạng này đẹp hơn!