

Bổ đề xích và một vài ứng dụng trong bài toán tổ hợp

Vũ Thế Khôi, email: vtkhoi@math.ac.vn

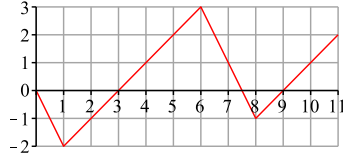
Viện Toán Học, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội

Một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm các số 0 và 1 được gọi *k-trội* (k là một số nguyên dương) nếu số các số 1 trong dãy con $a_1, a_2, \dots, a_i$ lớn hơn k lần số các số 0, với mọi $1 \leq i \leq n$.

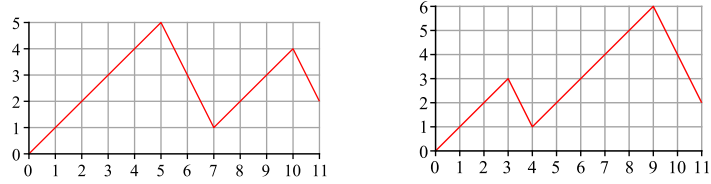
Bổ đề xích: Cho một dãy $a_1, a_2, \dots, a_{m+n}$ gồm m số 1 và n số 0, với $m \geq kn$. Trong số $m+n$ hoán vị vòng quanh của dãy đã cho có đúng $m - kn$ dãy *k-trội*.

Chứng minh: xếp các số 0 và 1 trên 1 vòng tròn. Nhận xét rằng việc bỏ đi dãy con $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k 0$ không làm thay đổi số các hoán vị vòng quanh *k-trội* vì dãy con này không ảnh hưởng gì đến tính trội và không có hoán vị *k-trội* nào bắt đầu bằng phần tử của dãy con này. Nhận xét rằng do $m \geq kn$ ta luôn tìm được 1 dãy con như vậy trên vòng tròn. Ta bỏ đi những dãy con này cho đến khi chỉ còn lại $m - kn$ số 1 và khi đó số các hoán vị vòng quanh *k-trội* chính là $m - kn$. $\square$

Bổ đề xích ở dạng này được đưa ra bởi Dvoretzky và Motzkin [2] và một trong các ứng dụng là đưa ra một lời giải khác cho *bài toán phiếu bầu*. Bài toán này được nhà toán học Joseph Bertrand đưa ra vào năm 1887. Từ đó đến nay đã có nhiều người đưa ra các cách giải khác nhau và cả những mở rộng của bài toán (xem [4]). Trước khi phát biểu bài toán phiếu bầu, chúng tôi sẽ trình bày một cách chứng minh khác của bổ đề xích.



Hình 1: Dây 01111100111



Hình 2: Các dây 2-trội 111111001110 và 111011111100

Chứng minh cách 2: Ta vẽ một đường gấp khúc trên mặt phẳng tọa độ như sau. Bắt đầu từ gốc tọa độ, lần lượt xét các số $a_1, a_2, \dots, a_{m+n}$, với mỗi số 1 nối điểm hiện tại tại (x, y) với $(x + 1, y + 1)$ và với số 0 nối với điểm đó với $(x + 1, y - k)$. Đường nhận được sẽ kết thúc tại điểm $(m + n, m - kn)$. Ta thấy dây k -trội sẽ tương ứng với đường gấp khúc nằm trên trục hoành và chỉ cắt trục hoành tại gốc tọa độ. Các dây hoán vị vòng quanh sẽ tương ứng với việc dịch gốc tọa độ đến điểm mới như trong hình vẽ. Xét những điểm trên đường gấp khúc có tung độ là $m - kn$ giá trị nhỏ nhất và có hoành độ lớn nhất có thể. Có đúng $m - kn$ điểm như vậy tương ứng với $m - kn$ hoán vị vòng quanh k -trội. Ví dụ trong hình vẽ là dây với $m = 8, n = 3$. Khi đó có đúng 2 hoán vị vòng quanh tạo ra dây 2-trội. $\square$

Một số bài toán tổ hợp liên quan đến hoán vị vòng quanh có thể được giải bằng cách áp dụng trực tiếp bổ đề xích hoặc dùng ý tưởng **biểu diễn các dây tổng riêng bằng đồ thị của một đường gấp khúc**. Độc giả có thể tham khảo [3, 1, 5, 6, 7] về một số dạng phát biểu khác của bổ đề xích và các ứng dụng. Trong khuôn khổ hạn chế của bài báo bày chúng tôi chỉ giới thiệu được một số ví dụ đơn giản.

Bài toán phiếu bầu: Trong một cuộc bầu cử, ứng cử viên A nhận được m phiếu bầu và ứng cử viên B nhận được n phiếu bầu, với $m \geq kn$. Hỏi có bao nhiêu cách sắp thứ tự các phiếu bầu để ứng cử viên A luôn nhận được số phiếu nhiều hơn k lần ứng viên B trong toàn bộ quá trình kiểm phiếu.

Lời giải: Theo bổ đề xích thì trong số $m + n$ hoán vị vòng quanh của một dãy gồm m phiếu bầu cho ứng cử viên A và n phiếu bầu cho ứng cử viên B có đúng $m - kn$ cái thỏa mãn điều kiện trong bài toán. Tổng số có $\binom{m+n}{n}$ cách sắp thứ tự các phiếu bầu, do đó số cách thỏa mãn bài toán là $\frac{m-kn}{m+n} \binom{m+n}{n}$. $\square$

Bài tập 1 sau đây là hệ quả trực tiếp của bổ đề xích.

Bài tập 1. Chứng minh rằng số các dãy k -trội chứa n số 0 và $kn + l$ số 1 bằng

$$\frac{l}{kn+l} \binom{(k+1)n+l}{n}.$$

Bài tập 2.(Olympic toán Tây-Ban-Nha 1997) Xung quanh một trường đua xe hình tròn có đặt các thùng xăng. Biết rằng tổng lượng xăng có trong tất cả các thùng này đủ cho xe chạy được 1 vòng. Chứng minh rằng luôn tồn tại một vị trí sao cho một chiếc xe (ban đầu hết xăng) xuất phát từ đó có đủ xăng để chạy 1 vòng.

Lời giải: đặt $a_i, i = 1, \dots, k$, là lượng xăng có trong thùng xăng thứ i (lần lượt theo chiều xe chạy). Ta gọi $b_i, i = 1, \dots, k-1$, là lượng xăng cần thiết để đi từ vị trí thùng xăng thứ i đến thùng thứ $i+1$ và b_k là lượng xăng cần thiết để đi từ vị trí thùng xăng thứ k đến thùng thứ 1. Ta vẽ một đường gấp khúc lần lượt nối các điểm $(0,0), (1, a_1), (2, a_1 - b_1), (3, a_1 - b_1 + a_2), (4, a_1 - b_1 + a_2 - b_2), \dots$. Do $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k b_i$ nên điểm cuối cùng là $(2k, 0)$. Chọn vị trí xuất phát tương ứng với điểm thấp nhất của đường gấp khúc khi đó xe sẽ có đủ xăng để chạy hết vòng. $\square$

Dùng ý tưởng trên bạn đọc có thể dễ dàng giải bài tập sau:

Bài tập 3.(Olympic toán Pháp 1997) Đặt ở mỗi đỉnh của một đa giác đều 1997 cạnh một số nguyên sao cho tổng của tất cả các số bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một đỉnh để xuất phát từ đỉnh đó đi ngược chiều kim đồng hồ thì cả 1997 số trong dãy tổng riêng đều là số dương.

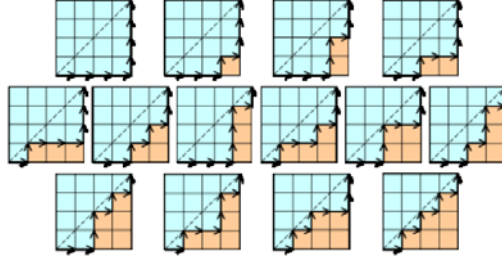
Bài tập sau là một dạng tổng quát của Bài tập 3.

Bài tập 4. Cho n số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ với tổng bằng 1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $1 \leq m \leq n$ có duy nhất một số $1 \leq k \leq n$ sao cho trong dãy tổng riêng

$$\begin{aligned} & a_k \\ & a_k + a_{k+1}, \\ & a_k + a_{k+1} + a_{k+2}, \\ & \dots \\ & a_k + a_{k+1} + \dots + a_n, \\ & a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + a_1, \\ & \dots \\ & a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + a_1 + \dots + a_{k-1} = 1, \end{aligned}$$

có đúng m số dương.

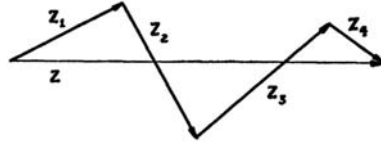
Lời giải: Đặt $s_j := \sum_{i=1}^j a_i$ là dãy tổng riêng của dãy ban đầu. Vẽ đường gấp khúc lần lượt nối các điểm $(0, 0), (1, s_1), (2, s_2), \dots, (n, s_n)$. Khi đó điểm cuối cùng sẽ là $(n, 1)$. Giả sử các điểm thấp nhất của đường gấp khúc này có tọa độ $(k_1, y_{\min}), (k_2, y_{\min}), \dots, (k_t, y_{\min})$ với $k_1 < k_2 < \dots < k_t$. Ta nhận thấy rằng nếu hoán vị vòng quanh bắt đầu từ a_{k_t} thì dãy tổng riêng chứa toàn các số dương. Nếu ta bắt đầu hoán vị vòng quanh từ $a_{k_{t-1}}$ thì dãy tổng riêng chứa đúng $n - 1$ số dương. Tiếp tục theo cách này, sau khi xét hết các điểm thấp nhất ta sẽ xét các điểm có độ cao tiếp theo. Cứ như vậy ta tìm được duy nhất một hoán vị vòng quanh mà dãy tổng riêng chứa đúng m số dương. $\square$



Hình 3: Các đường đi trong trường hợp $n = 4$.

Bài tập 5. Xét một lưới ô vuông cỡ $n \times n$ trên mặt phẳng tọa độ chứa các điểm $\{(x, y) | 0 \leq x, y \leq n\}$. Một đường đi là một đường từ đỉnh $(0, 0)$ đến đỉnh (n, n) trong đó mỗi bước đi sẽ theo vectơ $(0, 1)$ hoặc $(1, 0)$. Tính số các đường đi từ $(0, 0)$ đến (n, n) mà không vượt lên trên đường chéo $y = x$.
Lời giải: Ta có thể đồng nhất một đường đi với một dãy $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ các số 1 và 0 lần lượt tương ứng với việc đi theo vectơ $(0, 1)$ hoặc $(1, 0)$. Như vậy một đường đi không vượt lên đường chéo $y = x$ khi và chỉ khi số các số 1 luôn lớn hơn hoặc bằng số các số 0 trong mọi dãy con $a_1, a_2, \dots, a_i$. Ta nhận xét rằng các đường đi này tương ứng 1-1 với các dãy 1-trội chứa $n+1$ số 1 và n số 0. Mỗi dãy 1-trội này luôn bắt đầu bằng số 1. Như vậy khi bỏ số 1 đầu tiên ta sẽ nhận được dãy tương ứng với một đường đi không vượt lên đường chéo. Ngược lại từ một dãy số của đường đi ta chỉ cần thêm số 1 vào đầu tiên ta sẽ có một dãy 1-trội.

Theo Bổ đề xích thì trong $2n+1$ hoán vị vòng quanh của một dãy chứa $n+1$ số 1 và n số 0 sẽ có đúng 1 dãy 1-trội. như vậy số các dãy 1-trội này sẽ bằng $\frac{\binom{2n+1}{n}}{2n+1} = \frac{2n!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Số này xuất hiện trong rất nhiều bài toán tổ hợp đếm và được gọi là số *Catalan*. $\square$



Hình 4: s_1 có khoảng cách đến oz lớn nhất.

Bài tập 6. Cho là các số phức $z_1, z_2, \dots, z_n (n > 1)$ biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ gốc o . Với A là một tập con bất kỳ của $\{1, 2, \dots, n\}$ ta ký hiệu $z_A := \sum_{i \in A} z_i$. Giả sử các vectơ $\overrightarrow{oz_A}$ có phương khác nhau đôi một. Với $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$ ta ký hiệu $s_k(\sigma) := z_{i_1} + z_{i_2} + \dots + z_{i_k}$ và P_σ là bao lồi của các điểm $s_0(\sigma) = o, s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$. Chứng minh rằng nếu tập A có m phần tử thì trong số $n!$ đa giác có đúng $2(m-1)!(n-m)!$ đa giác chứa 1 cạnh song song và bằng oz_A .

Lời giải: Trước tiên ta chứng minh một dạng hình học của bổ đề xích.

Bổ đề: Giả sử $z_1, z_2, \dots, z_n (n > 1)$ là các số phức có tổng bằng z và thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó trong số các hoán vị vòng quanh của $\{1, 2, \dots, n\}$ có đúng 1 hoán vị σ sao cho các điểm $s_0(\sigma), s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$ nằm về cùng một phía phải của đường thẳng xác định bởi $\overrightarrow{oz}$.

Chứng minh bổ đề: Theo giả thiết các vectơ $\overrightarrow{oz_A}$ có phương khác nhau đôi một nên trong số các điểm s_i nằm về cùng một phía **trái** của đường thẳng xác định bởi $\overrightarrow{oz}$, có duy nhất một điểm s_k mà khoảng cách đến đường thẳng oz là lớn nhất (xem hình dưới). Khi đó $(k, k+1, \dots, n, 1, \dots, k-1)$ là hoán vị vòng quanh duy nhất thỏa mãn điều kiện của bổ đề. $\square$

Như vậy từ Bổ đề ta suy ra rằng trong số $n!$ hoán vị có đúng $(n-1)!$ sao cho $s_0(\sigma), s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$ nằm về cùng một phía phải của đường thẳng xác định bởi $\vec{oz}$. Kết quả không thay đổi nếu ta xét các hoán vị sao cho $s_0(\sigma), s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$ nằm về cùng một phía trái.

Ký hiệu $z_{n+1} = -s_n$. Ta nhận xét rằng nếu oz_A song song với 1 cạnh của P_σ thì $z_A = s_{k+m}(\sigma) - s_m(\sigma)$ với k nào đó. Như vậy nếu oz_A song song với 1 cạnh của P_σ thì $A = \{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+m}\}$ và cả hai đường gấp khúc tạo bởi hai tập có thứ tự $(z_{i_{k+1}}, z_{i_{k+2}}, \dots, z_{i_{k+m}})$ và $(z_{i_{k+m+1}}, \dots, z_{n+1}, z_1, \dots, z_{i_k})$ đều nằm về cùng 1 phía của đường thẳng oz_A . Ngược lại nếu ta có 1 cách sắp thứ tự hai tập $(z_{i_{k+1}}, z_{i_{k+2}}, \dots, z_{i_{k+m}})$ và $(z_{i_{k+m+1}}, \dots, z_{n+1}, z_1, \dots, z_{i_k})$ sao cho hai đường tương ứng nằm về cùng 1 phía của đường thẳng oz_A thì ta có thể khôi phục lại dãy $s_0(\sigma), s_1(\sigma), \dots, s_n(\sigma)$.

Theo bổ đề trên thì có $(m-1)!$ cách sắp xếp để đường tạo bởi

$(z_{i_{k+1}}, z_{i_{k+2}}, \dots, z_{i_{k+m}})$ nằm về bên phải của đường thẳng xác định bởi $\vec{oz_A}$ và $(n-m)!$ cách sắp xếp để đường tạo bởi $(z_{i_{k+m+1}}, \dots, z_{n+1}, z_1, \dots, z_{i_k})$ nằm về bên phải của đường thẳng xác định bởi $\vec{oz_A}$. Công thức cũng đúng nếu xét bên trái, từ đó ta nhận được kết quả cần tìm. $\square$

Cuối cùng là hai bài tập dành cho bạn đọc thử sức.

Bài tập 7. Cho điểm $P(m, n)$ với m, n là các số tự nhiên. Giả sử P nằm trên đường thẳng $L : y = px + q$ với p, q là các số tự nhiên. Một đường đi là một đường từ đỉnh $(0, 0)$ đến đỉnh P trong đó mỗi bước đi sẽ theo vectơ $(0, 1)$ hoặc $(1, 0)$. Chứng minh rằng số các đường đi chỉ cắt L tại một điểm duy nhất là P bằng $\frac{q}{m+n} \binom{m+n}{m}$.

Bài tập 8. Cho $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ là một dãy các số thực có tổng s . Ta ký hiệu dãy tổng riêng $s_i := x_1 + x_2 + \dots + x_i$ với $1 \leq i \leq k$ và đặt $m(p) := \min_{1 \leq i \leq k} s_i$. Số $W(p) := \max(0, m(p))$ được gọi là *trọng số* của dãy. Chứng minh rằng tổng trọng số của k dãy hoán vị vòng quanh của p đúng bằng s .

Tài liệu

- [1] Glen Baxter, A Combinatorial Lemma for Complex Numbers, *Ann. Math. Statist.* Vol. 32, No. 3 (1961), 901-904.
- [2] A. Dvoretzky and Th. Motzkin, A problem of arrangements, *Duke Math. J.* 14 (1947) 305-313.
- [3] N. Dershowitz and S. Zaks, The cycle lemma and some applications, *Europ. J. Combinatorics* 11 (1990) 35-40.
- [4] Marc Renault, Four Proofs of the Ballot Theorem, *Math. Magazine* Vol. 80, No. 5,, pp. 345-352(8)
- [5] Nakamigawa T., Tokushigea N., simple counting formula for lattice paths, preprint, www.cc.uryukyu.ac.jp/~hide/path11.pdf.
- [6] Snevily, Hunter, West Douglas, The bricklayer problem and the strong cycle lemma. *Amer. Math. Monthly* 105 (1998), no. 2, 131-143.
- [7] F. Spitzer, A combinatorial lemma and its application to probability theory, *Trans. Am. Math. Soc.* 82 (1956) 323-339.