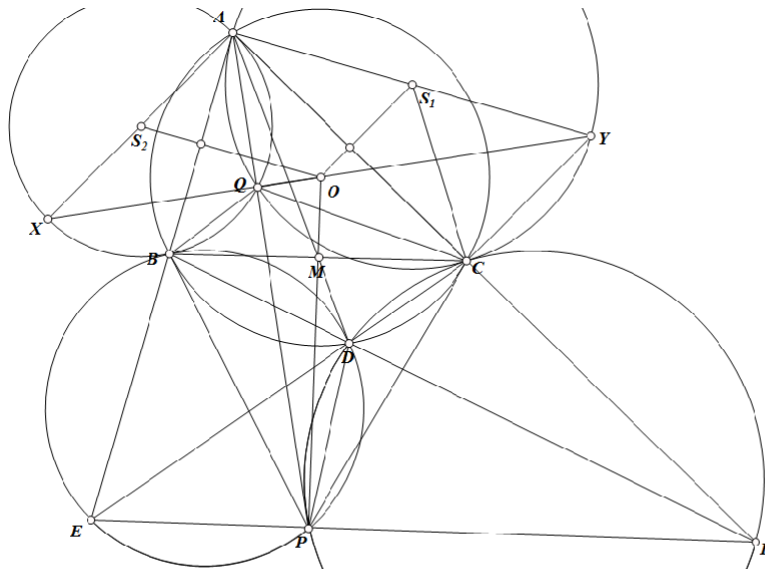


Một số bài toán hình học chọn đội tuyển VMO của Hà Nội các năm gần đây

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Lời nói đầu: Trong các đề chọn đội tuyển thi HSGQG của Hà Nội bao giờ cũng dành một thời lượng một bài dành cho phân môn hình học phẳng. Các bài toán này không đòi hỏi nhiều kiến thức, song, lại cần sự tinh tế trong quá trình kẻ vẽ hình phụ cũng như cách phối hợp các kiến thức toán chuyên. Điều đặc biệt là tôi thấy có khá nhiều bài hình được lấy hoặc lai tạo từ các đề thi của Nga. Để các bạn tiếp cận dễ dàng, sau đây tôi xin giới thiệu một vài bài hình học hay chọn tuyển của Hà Nội (đặc biệt là bài hình chọn tuyển Hà Nội 2016-2017)

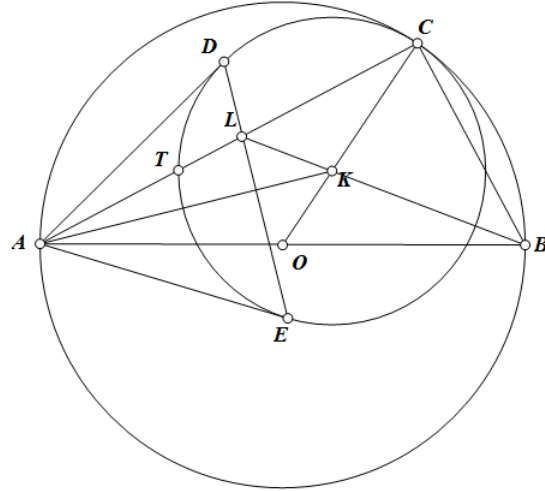
Bài toán 1 (Chọn đội tuyển VMO Hà Nội 2016-2017): Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm BC . AM cắt (O) tại các điểm A, D . Giả sử $BD \cap AC = F, CD \cap AB = E$. $(ABF) \cap (ACE) = A, P$. Gọi (S_1) là đường tròn qua C tiếp xúc AB tại A . Gọi (S_2) là đường tròn tiếp xúc AC tại A và đi B . $A, Q = (S_1) \cap (S_2)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ vuông.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Ta thấy ngay được rằng: P là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $ACFDBE$ do đó dĩ nhiên P, E, F thẳng hàng. Theo định lí *Borcard* thì ta có: $\overline{O, M, P} \perp EF$ do đó $EF \parallel BC$ vậy là: $\angle BCD = \angle DEP = \angle DBP$ do đó PB tiếp xúc (O). Tương tự PC tiếp xúc (O). Kẻ các đường kính AX, AY lần lượt của $(S_2), (S_1)$. Lại có: $\angle AQB = 180^\circ - \angle AXB = 180^\circ - \angle AS_2O$. Tương tự thì: $\angle AQC = 180^\circ - \angle AS_1O$ do đó $\angle AQB + \angle AQC = 360^\circ - 2\angle AS_1O = 2(180^\circ - \angle A) = 360^\circ - 2\angle A$ do đó hiển nhiên $\angle BQC = 2\angle A$ do đó P, B, Q, O, C nằm trên một đường tròn vậy nên $OQ \perp PQ$ do đó ta thu được ngay đpcm.

Nhận xét: Nếu bài toán hỏi là chứng minh A, P, Q thẳng hàng thì có vẻ sẽ hay hơn. Điều này cũng không khó để chứng minh. Chú ý việc tứ giác AS_2S_1O là hình bình hành nên S_1S_2 chia đôi AO do đó theo tính chất vị tự dĩ nhiên X, Y, O thẳng hàng. Ta có: $\angle AQX + \angle AQY = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên X, Y, Q, O thẳng hàng. Dĩ nhiên là $AQ \perp OQ$ do đó A, Q, P thẳng hàng.

Bài toán 2(Hà Nội TST 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC . Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn $(K; KC)$. Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.



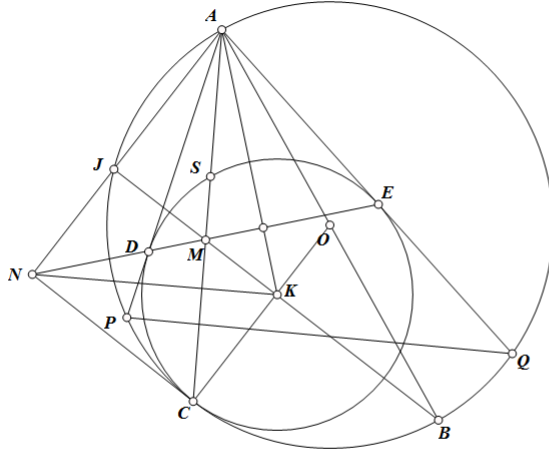
Lời giải 1(Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):

Gọi AC cắt đường tròn (K) tại điểm T , giao BK tại điểm L . Do C là tâm vị tự trong của (O) và (K) nên ta có: $\frac{AT}{TC} = \frac{OK}{KC}$. do đó ta có: $TK \parallel AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác LAB với cát tuyến $\overline{OKC}$ ta có:

$\frac{CL}{CA} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \frac{KB}{KL} = 1$. Do $TK \parallel AB$ nên ta có: $\frac{CL}{CA} = \frac{TL}{TA}$ do đó: $(AL, TC) = -1$. Mặt khác nếu gọi DE cắt AC tại điểm L' thế thì $(AL' TC) = -1$ do đó $L \equiv L'$ do đó ta có: DE, BK, AC đồng quy (đpcm).

Nhận xét: Lời giải thứ nhất rất hay bởi tôi thực sự rất ấn tượng với cách sử dụng vị tự ở đây.

Lời giải 2(Nguyễn Duy Khương-11T2-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):



Gọi BK cắt lại (O) tại điểm thứ hai J . Gọi JA cắt DE tại điểm N . Do $\angle KJA = \angle KDA = 90^\circ$ do đó tứ giác $JADE$ nội tiếp. Do (O) tiếp xúc (K) nên áp dụng tính chất trục đẳng phương thì tiếp tuyến chung tại C của $(O), (K), DE$ và JA đồng quy tại 1 điểm N . Gọi DE cắt BK tại điểm M . Kẻ tiếp tuyến thứ hai NS tới (K) thế thì do NC đã là tiếp tuyến tới (K) nên ta có: $DSCE$ là 1 tứ giác điều hoà do đó hiển nhiên là ta có: A, S, C thẳng hàng. Gọi M là giao điểm của BK và DE . Gọi I là trung điểm DE .

A geometric diagram illustrating a sphere with points A, B, C, D, E, Q on its surface and a point P above it. Lines connect P to A, B, C, D, E, Q . Internal lines connect A to B, C, D, E, Q and other points like T, L, K, O on the sphere's surface.

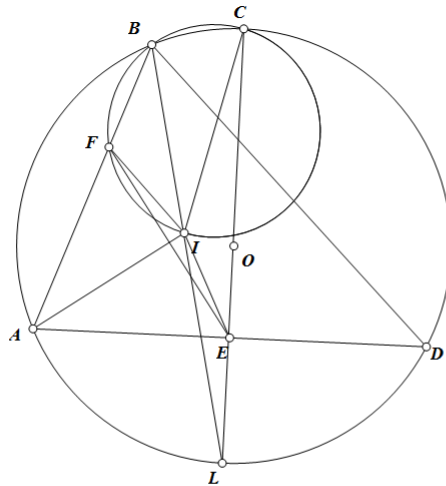
Gọi T là giao điểm của AC và (K) . Gọi L là giao điểm ED và TC . Từ giả thiết ta có được: $EDTC$ là một tứ giác điều hoà. Do đó ta có: ED , tiếp tuyến tại T, C đồng quy tại 1 điểm gọi là điểm P . Vậy ta có: $PK \perp AC$. Lại có: $AK \perp ED$ nên L là trực tâm tam giác PKA . Gọi BK cắt AP tại điểm Q vậy ta thu được: $KQ \perp PA$ vậy ta có: $PQ \cdot PA = PR \cdot PK = PC^2$, hay là Q thuộc (O) . Do đó có: $\angle BQA = 90^\circ$ mà $\angle KQA = 90^\circ$ nên thu được: B, L, K thẳng hàng hay là DE, BK, AC đồng quy (đpcm).

Lời giải 4(Nguyễn Lê Phước): Một lời giải ngắn nhất và hay nhất cho bài toán hay này.

Trên AC lấy điểm I sao cho $IK \parallel AO$ thế thì $KI = KC$ do đó $CDIE$ nội tiếp. Gọi BK cắt (O) tại H khác B thì $\angle AHK = 90^\circ$ suy ra $HDKE$ nội tiếp. Mà $\angle HCI = \angle HBA = \angle HKI$ suy ra $CHKI$ nội tiếp. Áp dụng tính chất trục đẳng phương cho ba đường tròn $(CDIE)$, $(HDKE)$, $(CHKI)$ dĩ nhiên BK, AC, DE đồng quy.

Bài toán 3(chọn đội tuyển thi VMO-Hà Nội 2014-2015):

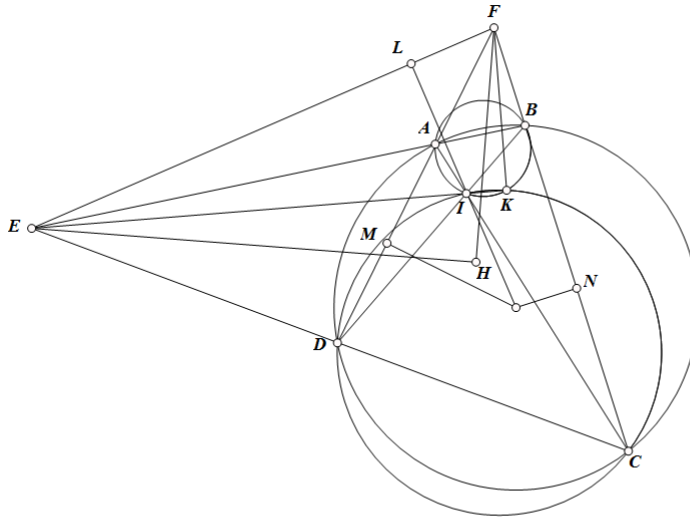
Cho tứ giác $ABCD$ ($AB < BD$) nội tiếp đường tròn (O) biết $AC = CD$. Gọi I là tâm nội tiếp đường tròn ABD . Gọi (BIC) cắt AB tại điểm thứ hai F . Gọi E là trung điểm AD . Chứng minh rằng: $AI \perp EF$.



Lời giải: Ta có: $\angle LAI = \frac{\angle BAD}{2} + \angle DAL = \frac{\angle BAD}{2} + \angle BAI = \angle AIL$ do đó tam giác AIL cân tại L . Chứng minh tương tự ta có: $IL = LD$. Lại có theo hệ thức lượng trong tam giác vuông CDL thì $LD^2 = LE \cdot LC = LI^2$ do đó ta có: $\triangle LEI \sim \triangle CIL(g.g)$. Vậy ta có: $90^\circ + \angle ICB = 90^\circ + \angle IEA$ do đó $\angle ICB = \angle IEA$. Do đó ta thu được tam giác $\angle FIA = \angle EIA$ do đó ta thu được: $\triangle IFA = \triangle IEA(g.c.g)$ do đó hiển nhiên thu được: AI là trung trực EF do đó ta có đpcm

Nhận xét: Bài toán trên không quá khó và thuộc vào phần ăn điểm xong kĩ năng biến đổi góc ở lời giải trên rất hay và quan trọng. Đáng chú ý ở điểm hình vẽ *không như thông thường* đã giúp tiếp cận lời giải dễ hơn.

Bài toán 4(chọn đội tuyển Hà Nội thi VMO 2012-2013): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp không phải là một hình thang. Gọi AB cắt CD tại E . AD cắt BC tại điểm F . Phần giác các góc CFD và BEC gặp nhau ở điểm H . Hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại điểm I . Gọi (ABI) cắt (CDI) tại điểm thứ hai K . Chứng minh rằng: E, F, H, K đồng viên.



Lời giải: Trước tiên ta có:

$$\angle FHE = 180^\circ - \angle HFD - \angle HEB - \angle EAD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle D - \angle C}{2} - \frac{180^\circ - \angle B - \angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle D}{2} = 90^\circ (1).$$

Ta gọi L là giao điểm thứ hai khác A của (EAB) và (ECD) .

Thế thì ta có: $EL.EF = EA.EB = EI.EK$ do đó tứ giác $LFKI$ nội tiếp. Áp dụng tính chất của trục đẳng phương cho các đường tròn (FAB) , (FCD) , (O) , $(LFKI)$ thì ta có: LF, AB, CD, IK đồng quy tại 1 điểm chính là điểm E .

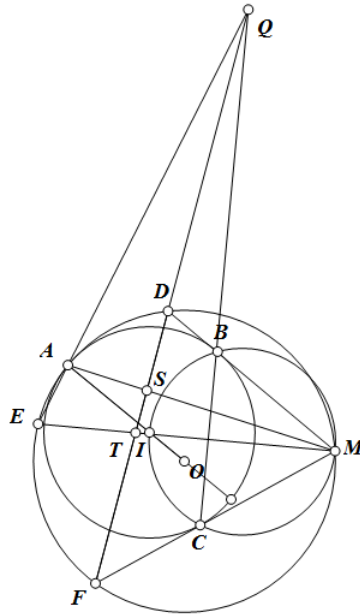
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Ta có: $\angle LAD = 180^\circ - \angle LAF = 180^\circ - \angle LBF = \angle LBC$. Vậy ta có: $\triangle LAM \sim \triangle LBN$ (c.g.c) do đó $\angle LMF = \angle LNF$ hay là L thuộc (FMN) . Vậy ta thu được: $\angle OLF = 90^\circ$. Vậy mà theo định lý Borcard thì $OI \perp EF$. Vậy O, I, L thẳng hàng. Hay là ta có: $\angle EKF = 90^\circ$ (2). Từ (1)(2) ta thu được E, F, H, K đồng viên (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này không khó và khá quen thuộc với học sinh chuyên.

Bài toán 5(chọn đội tuyển thi VMO-Hà Nội 2011-2012): Cho đường tròn (O) và các điểm A, M trên (O) sao cho AM không là đường kính (O) . Lấy I trên đoạn OA ($I \neq O, A$). (I, IA) cắt đường tròn đường kính (IM) tại các điểm B, C . MB, MI, MC cắt (O) lần lượt tại các điểm D, E, F theo thứ tự. DF cắt ME, MA, AE lần lượt tại T, S, Q . Chứng minh rằng:

a) $SD.SF = ST.SQ$.

b) B, C, Q thẳng hàng.



Lời giải: a) Ta có: $\angle QAM = \angle MFE = \angle QTM$ do đó hiển nhiên rằng: tứ giác $AQTM$ nội tiếp hay là ta thu ngay được rằng: $ST.SQ = SA.SM = SD.SF$ (đpcm).

b) Hiển nhiên ta có ngay được rằng do (IM) cắt $(I; IA)$ tại điểm B, C nên MB, MC là tiếp tuyến đến (I, IA) . Ta nhận thấy do I nằm trên OA nên (I, IA) tiếp xúc (O) tại A . MI chính là phân giác góc BMC hay suy ra rằng E chính là trung điểm cung DAF của (O) . Ta quy về bài toán mới chứng minh rằng: AE, DF, BC đồng quy.

Gọi BC cắt DF tại điểm Q' . Theo định lí Menelaus thì $\frac{Q'F}{Q'D} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{CM}{CF} = 1$ do đó

dẫn tới: $\frac{Q'F}{Q'D} = \frac{CF}{BD}$ (vì $CM = BM$). Ta dễ thấy rằng: EB và EC lần lượt đi qua trung điểm cung DM, MF không chứa E của (O) (tính chất quen thuộc về đường tròn *Mixtilinear*). Do đó theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM}$ đồng thời $\frac{AF}{AM} = \frac{CF}{CM}$ suy ra ngay rằng $\frac{AF}{AD} = \frac{CF}{BD} = \frac{Q'F}{Q'D}$ hiển nhiên ta thu được rằng AQ' là phân giác ngoài $\angle DAF$ do đó AQ' đi qua trung điểm cung DAF của (O) chính là E hay là: $Q \equiv Q'$ do đó ta có: AE, DF, BC đồng quy. Vậy ta có được đpcm.

Nhận xét: Khai thác bài toán về đường thẳng Mixtilinear có nhiều cách thú vị xong việc che giấu bớt đi phần lớn giả thiết đã gây chút khó khăn cho người làm nhất là 2 câu a)b) ít liên quan như bài trên