

CHUYÊN ĐỀ: Hàm số và thuần nhất, chuẩn hóa trong chứng minh BĐT-CT THCS

Người thực hiện: Đậu Anh Kiên (Diendantoanhoc.net)

Học sinh 9A THCS Cao Xuân Huy- Nghệ An

1) Mở đầu:

2) Phương pháp:

a) Hàm số trong chứng minh bất đẳng thức- cực trị THCS:

- Ở chương trình THCS, hàm số đồ thị ta chỉ học hàm số bậc nhất, tức là:

-Hàm số: $y = ax + b$ với $a \neq 0$ cho ta đồ thị là một đường thẳng đi qua điểm b trên trục tung và điểm $-\frac{b}{a}$ trên trục hoành, hình vẽ:

Do đồ thị của hàm số bậc nhất là một đường thẳng đi từ dưới lên nên ta có tính chất sau:

* Tính chất: Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ trên đoạn $[x_0; x_1]$. Với $a > 0$:

$$f(x) \leq m \Leftrightarrow f(x_1) \leq m$$

$$f(x) \geq m \Leftrightarrow f(x_0) \geq m$$

Để các bạn có thể hình dung một cách cụ thể, ta sẽ tiếp cận với một số ví dụ sau:

Bài toán 1 : Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 4$.

Chứng minh: $x + y \geq xyz$

Giải:

$$\text{Xét } P = xyz - (x + y) = xyz - (4 - z)$$

$$\text{Đặt } xy = t$$

$$\Rightarrow f(t) = tz - (4 - z) \text{ là hàm số bậc nhất đối với } t \text{ (} z \text{ là tham số)}$$

$$\text{Ta có: } 0 < t \leq \frac{(4 - z)^2}{4}$$

$$\text{Dựa vào tính chất trên, ta cần chứng minh: } f\left(\frac{(4 - z)^2}{4}\right) \leq 0$$

$$\text{Thật vậy: } f\left(\frac{(4 - z)^2}{4}\right) = z\left(\frac{(4 - z)^2}{4}\right) - (4 - z) = \frac{(z - 4)(z - 2)^2}{4} \leq 0 \text{ (do } x + y + z = 4)$$

Vậy ta có $P \leq 0$ hay ĐPCM

* Nhận xét: Với bài toán trên ta có 2 cách đơn giản sau:

$$*C1: a + b \geq abc$$

$$\Leftrightarrow a + b \geq ab(4 - a - b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(ab + 1) \geq 4ab$$

$$*C2: (a + b)(a + b + c)^2 \geq 4(a + b)^2c \geq 16abc \Rightarrow a + b \geq abc \text{ (Đúng theo AM-GM)}$$

*Bài toán 2: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$

$$\text{Tìm Min: } P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{2}$$

* Bài toán này được mình tổng quát như sau:

Bài toán tổng quát:(PlanBbyFESN)

Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn: $x + y + z = k$ ($\forall k > 0$)

$$\text{Tìm Min: } P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{2k}$$

Chọn $k = 1$ ta sẽ có bài toán trên!

Giải (PlanBbyFESN): Với những người chưa được tiếp xúc nhiều với BĐT Schur thì bài toán này quả thực là không hề dễ:

Sau đây là những lời giải của mình cho bài BDT này:

$$\text{Ta có: } A = a^2 + (b+c)^2 + bc\left(\frac{9a}{2} - 2\right) - \frac{1}{2} = bc\left(\frac{9a}{2} - 2\right) + 2a^2 - 2a + \frac{1}{2}$$

Đặt $bc = t$

$$\Rightarrow A = t\left(\frac{9a}{2} - 2\right) + 2a^2 - 2a + \frac{1}{2} \text{ là hàm số bậc nhất đối với } t \text{ (} a \text{ là tham số)}$$

$$\text{Ta có: } 0 < t \leq \frac{(1-a)^2}{4}$$

Đối với bài toán này, ta chưa chắc chắn rằng hệ số $\frac{9a}{2} - 2 > 0$ nên ta cần chứng minh đồng thời cả hai cái sau:

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right) \geq 0 \end{cases}$$

Thật vậy:

$$f(0) = 2a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$f\left(\frac{(1-a)^2}{4}\right) = \frac{a(3a-1)^2}{8} \geq 0$$

Nên ta có DPCM. Dấu "=" sẽ là bộ số: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

* Nhận xét: Đối với bài toán trên, ta còn 2 cách sau:

*C2: (ngocanh99)

Ta có bổ đề quen thuộc sau, chứng minh hoàn toàn bằng AM-GM:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

Áp dụng bổ đề ta được:

$$xyz \geq (k-2x)(k-2y)(k-2z) \Rightarrow 9xyz \geq 4k(xy+yz+xz) - k^3$$

$$\Rightarrow P \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4(xy + yz + xz) - k^2}{2} = \frac{2(x + y + z)^2 - k^2}{2} = \frac{k^2}{2}$$

*C3: (PlanBbyFESN)

Theo nguyên lí Đê-rích-lê trong 3 số $a - \frac{1}{3}; b - \frac{1}{3}; c - \frac{1}{3}$ luôn tồn tại 2 số có tích không âm

$$\text{Giả sử: } (a - \frac{1}{3})(b - \frac{1}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow ab + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}(a + b) \Leftrightarrow abc + \frac{c}{9} \geq \frac{c}{3}(1 - c) \Leftrightarrow abc + \frac{c^2}{3} \geq \frac{2c}{9} \Leftrightarrow \frac{9abc}{2} + \frac{3c^2}{2} \geq c$$

$$\Rightarrow P = \sum a^2 + \frac{9abc}{2} \geq a^2 + b^2 + c - \frac{1}{2}c^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} - \frac{1}{2}c^2 + c \geq \frac{(1 - c)^2}{2} - \frac{1}{2}c^2 + c = \frac{1}{2}$$

Bài toán 3: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

$$\text{Chứng minh: } xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Giải:

$$\text{Đặt } A = \frac{7}{27} - (xy + yz + zx - 2xyz) = \frac{7}{27} - x(y + z) - yz(1 - 2x) = yz(2x - 1) - x + x^2 + \frac{7}{27}$$

Đặt $yz = t$

$$\Rightarrow A = t(2x - 1) - x + x^2 + \frac{7}{27} \text{ là hàm số bậc nhất đối với } t \text{ (} x \text{ là tham số)}$$

$$\text{Ta có: } 0 < t \leq \frac{(1 - x)^2}{4}$$

$$\text{Vậy cần chứng minh: } \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(\frac{(1 - x)^2}{4}) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Thật vậy: } \begin{cases} f(0) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{27} > 0 \\ f(\frac{(1 - x)^2}{4}) = \frac{1}{9}(3x - 1)^2(6x + 1) \geq 0 \end{cases}$$

Vậy ta có ĐPCM.

* Nhận xét: Đối với bài toán trên ta còn một số cách:

*C2: Do $x + y + z = 1$.

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \Leftrightarrow (xy + yz + xz)(x + y + z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3$$

Khai triển

$$\text{BDT} \Leftrightarrow 7(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \geq 6xy(x + y) + 6yz(y + z) + 6zx(z + x) \quad (1)$$

$$\text{Mà } x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz \text{ (AM-GM)}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$$

$$\Leftrightarrow xyz \geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) \text{ (Đúng theo AM-GM)}$$

*C3: Trong 3 số $x - \frac{1}{3}; y - \frac{1}{3}; z - \frac{1}{3}$ tồn tại ít nhất 2 số có tích không âm.

Giả sử: $x - \frac{1}{3} \geq 0; y - \frac{1}{3} \geq 0$

$$(x - \frac{1}{3})(y - \frac{1}{3}) \geq 0 \Rightarrow xy + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3}(x + y) \Rightarrow xyz + \frac{z}{9} \geq \frac{1}{3}z(x + y)$$

$$\Rightarrow -2xyz \leq \frac{2z}{9} - \frac{2}{3}z(x + y) \Rightarrow xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{2}{9}z + \frac{1}{3}z(x + y) + xy$$

Mà:

$$\frac{2}{9}z + \frac{1}{3}z(x + y) + xy \leq \frac{2}{9}z + \frac{1}{3}z(x + y) + \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{2}{9}z + \frac{1}{3}z(1 - z) + \frac{1}{4}(1 - z)^2 = -\frac{1}{12}(z - \frac{1}{3})^2 + \frac{7}{27} \leq \frac{7}{27}$$

Mình sẽ nói thêm một chút về tính chất hàm số bậc hai, nhưng chỉ mang tính giới thiệu cho mọi người là chính:

Hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ với a khác 0 là một parabol như hình vẽ:

Với $a > 0$:

Với $a < 0$

* Tính chất: Đối với hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ Để chứng minh $f(x) \leq 0$ với $x \in [x_0; x_1]$ ta cần

CM:

$$\begin{cases} f(x_0) \leq 0 \\ f(x_1) \leq 0 \end{cases}$$

2. Đối với hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$ Để chứng minh $f(x) \geq 0$ với $x \in [x_0; x_1]$ ta cần CM:

$$\begin{cases} f(x_0) \geq 0 \\ f(x_1) \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán: Cho $a, b, c \in [1, 2]$ CM: $a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc$

Lời giải: Bài này nếu không nhầm là ở trong THPT, có hai cách như sau:

*Cách 1:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$

$$a^3 - 5a + 2 = (a - 2)(a^2 + 2a - 1) \leq 0$$

$$b^3 + 5a - 5ab - 1 = (b - 1)(b^2 + b + 1 - 5a) \leq (b - 1)(a^2 + a + 1 - 5a) = (b - 1)(a^2 - 4a + 1) \leq 0$$

$$c^3 + 5ab - 5abc - 1 = (c - 1)(c^2 + c + 1 - 5ab) \leq (c - 1)(a^2 + a + 1 - 5a) = (c - 1)(a^2 - 4a + 1) \leq 0$$

Cộng 3 bất trên lại với nhau $\Rightarrow$ đpcm

*Cách 2:

$$A = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq 5$$

Do vai trò của a, b, c bình đẳng, giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$

$$\text{Vì } a \leq b \text{ và } b \leq c \Rightarrow (a - b)(b^2 - c^2) \leq 0 \Rightarrow ab^2 + bc^2 - ac^2 - b^3 \leq 0 \Rightarrow b^3 \leq ab^2 + bc^2 - ac^2$$

Chia 2 vế cho $abc > 0 \Rightarrow \frac{b^2}{ca} \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{c}{b}$ (1)

Mặt khác $\frac{a^2}{bc} \leq \frac{a^2}{ac} = \frac{a}{c}$ (2) và $\frac{c^2}{ab} \leq \frac{2c}{ab} \leq \frac{2c}{b}$ (3)

Cộng vế theo vế (1);(2);(3) : $A \leq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$

Vì từ giả thiết: $a \leq c \leq 2 \leq 2a \Rightarrow \frac{2a}{c} \geq 1$ và $\frac{c}{a} \geq 1 > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{2a}{c} - 1\right) \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{5}{2}$

Tương tự: $\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \leq \frac{5}{2}$

Cộng vế theo vế : $A \leq 5$ (ĐPCM)

Bài này từng được Rias Gremony đăng 1 lần mà lúc đó mình cũng tìm được 1 cách như sau(tất nhiên không đẹp cho lắm):

*Cách 3: Đặt: $x + 1 = a, y + 1 = b, z + 1 = c$

$1 \leq a, b, c \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x, y, z \leq 1$

Khai triển(1) ra ta được:

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sum x^3 + 3 \sum x^2 + 3 \sum x + 3 \leq 5xyz + 5 \sum xy + 5 \sum x + 5$

$\Leftrightarrow 2(x + y + z) + 5xyz + 5 \sum xy + 2 \geq \sum x^3 + 3 \sum x^2$ (*)

Do $0 \leq x, y, z \leq 1$

nên ta có: $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq 0 \Rightarrow 1 + \sum xy \geq xyz + \sum x$

$\Rightarrow 2 + 2 \sum xy \geq 2xyz + 2 \sum x$ (**)

Từ (*) và (**) ta sẽ có điều cần chứng minh nếu:

$4(x + y + z) + 7xyz + 3 \sum xy \geq x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Do $0 \leq x, y, z \leq 1$ nên hiển nhiên:

$$\begin{aligned} \sum x &\geq \sum x^2 \\ \sum x &\geq \sum x^3 \\ \sum xy &\geq 0; xyz \geq 0 \text{ (Đpcm)} \end{aligned}$$

Và ta sẽ chứng minh bài toán này bằng phương pháp hàm số bậc hai như sau:

Cách 4: Phương pháp hàm số bậc hai:

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow 2 \geq a \geq b \geq c \geq 1 \Rightarrow c \leq a \leq 2 \leq 2c$

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc \leq 0 \Leftrightarrow 2ca^2 + b^3 + c^3 - 5abc \leq 0$

Xét $f(a) = 2ca^2 + b^3 + c^3 - 5abc$ là hàm số bậc hai đối với a (b, c là tham số) có hệ số $2c > 0$. Ta có: $a \in [b; 2c]$

Để chứng minh $f(a) \leq 0$ ta cần chứng minh: $\begin{cases} f(b) \leq 0 \\ f(2c) \leq 0 \end{cases}$

Thật vậy: $\begin{cases} f(b) = b^2(b - 2c) + c(c^2 - b^2) \leq 0 \\ f(2c) = (b - c)(b^2 + bc - 9c^2) = -3c^2(b - c) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{ĐPCM})$

* Tuy nhiên hàm số bậc hai mình chỉ đưa ra mang tính tham khảo là chính, trong chương trình THCS, cái này gần như không sử dụng đến!

*** Theo như kinh nghiệm của mình, việc vận dụng hàm số bậc nhất vào giải BDT là rất hay, dấu hiệu để có thể vận dụng hàm số bậc nhất thường là có điều kiện của đề bài là tổng 3 biến bằng 1 giá trị nào đó: $a + b + c = k$

b) Thuần nhất trong bất đẳng thức:

Tất nhiên, mới đầu nghe cái tên này thì tưởng rằng gì cao xa lắm, mình cũng vậy, ta thường nghe từ thuần nhất đi đôi với từ chuẩn hóa, tuy nhiên trong chuyên đề này mình sẽ không nói đến cái này, mà thực ra cũng không biết mà đưa ra, ta chỉ hiểu nó giúp dễ dàng hơn trong việc giải toán mà không mất đi tính tổng quát của bài toán!

Thuần nhất ở đây mà mình nói đơn giản chỉ là đưa BDT cần CM về dạng đẳng cấp để dễ đánh giá, cái mà ít người sử dụng, các đánh giá có thể là AM-GM, Cauchy-Schwarz, hoặc các BDT quen thuộc như: $x^3 + y^3 - xy(x + y) = (x + y)(x - y)^2$ hay $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$: Đánh giá này thực ra là một BDT mà chúng ta có lẽ đã quen: BDT Schur. Tuy nhiên, ta sẽ chỉ xem đó là khai triển của BDT trên mà không gọi tên nó!

Bài toán 1: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 1$
CM: $7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz$

Lời giải: Đưa BDT về dạng thuần nhất như sau:

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz \Leftrightarrow 7(xy + yz + zx)(x + y + z) \leq 2(x + y + z)^3 + 9xyz$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 + (y + z)(y - z)^2 + (z + x)(z - x)^2 \geq 0 \quad (\text{ĐÚNG})$$

* Bài trên cũng có thể giải bằng phương pháp hàm số bậc nhất trên, mời các bạn!

Bài toán 2: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$
CM: $ab + bc + ca - abc \leq 2$

Lời giải: $a, b, c \geq 0; a^3 + b^3 + c^3 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3$

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng thuần nhất như sau: (mạnh hơn)

$$ab + bc + ca - abc \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(ab + bc + ca)(a + b + c)}{3} - abc \leq \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2 \geq 0 \quad (\text{ĐÚNG})$$

Bài toán 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 9 \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Giải: Đây là 1 bài của Phamngochung9a đăng tìm 1 lời giải đẹp, lời giải của bạn đó dùng phương pháp S.O.S rất lằng nhằng.

Nếu viết BĐT dưới dạng thuần nhất thì đây là 1 bài hết sức đơn giản:

Đưa BDT về dạng thuần nhất như sau:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 9 \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 9 \geq 4(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 4 \left(\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \right)$$

Một bài BDT quen thuộc: $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{4a}{b+c}$ (Cauchy-Schwarz)

.....

3) Lời kết:

Chuyên đề này viết kỉ niệm gần 1 năm mình gia nhập VMF và cũng là sắp đến sinh nhật thứ 15 của mình. Mong nhận nhiều lời cảm ơn từ các bạn! :)

Người thực hiện: Đậu Anh Kiên Học sinh 9A THCS Cao Xuân Huy- Nghệ An