

ỨNG DỤNG MỘT BỔ ĐỀ KẾT HỢP VỚI ĐẠO HÀM TRONG CHỨNG MINH BĐT

Ngày 15 tháng 10 năm 2016

Tóm tắt nội dung

Chứng minh BDT bằng phương pháp đánh giá xuất hiện rất lâu, tuy nhiên phương pháp có một khuyết điểm là đối với mỗi dạng bài phải suy đoán dạng BDT phụ để đánh giá. Bài viết trình bày một bổ đề (sẽ làm cầu hình cho đánh giá) kết hợp với phương pháp đạo hàm nhằm tạo ra một cách đánh giá chung cho một lớp nhỏ các bài toán bất đẳng thức.

Mọi đóng góp về tài liệu xin gửi về: anh110004@gmail.com

Xin gửi lời cảm ơn chân thành đến với quý Thầy Cô trong tổ Toán

Nguyễn Tuấn Anh

THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp

Mục lục

1	Bổ đề và ví dụ mở đầu	2
1.1	Bổ đề (Võ Quốc Bá Cẩn - Vasile Cirtoaje)	2
1.2	Bổ đề kết hợp với đạo hàm	2
2	Các ví dụ áp dụng	5
2.1	Các ví dụ cơ bản	5
2.2	Khai thác thêm bộ đôi phương pháp	10
2.3	Các ví dụ nâng cao	13
3	Kết luận	18

1 BỔ đề và ví dụ mở đầu

1.1 BỔ đề (Võ Quốc Bá Cẩn - Vasile Cirtoaje)

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1 thì

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Chứng minh. Vì $abc = 1$ nên tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho

$$a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$$

Khi đó BDT trở thành:

$$\frac{x^4}{y^2z^2 + yzx^2 + x^4} + \frac{y^4}{z^2x^2 + zxy^2 + y^4} + \frac{z^4}{x^2y^2 + xyz^2 + z^4} \geq 1$$

Theo BDT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x^4}{y^2z^2 + yzx^2 + x^4} + \frac{y^4}{z^2x^2 + zxy^2 + y^4} + \frac{z^4}{x^2y^2 + xyz^2 + z^4} \\ & \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(x + y + z)} \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(x + y + z) \\ & \Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z) \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xy - yz)^2 + \frac{1}{2}(yz - zx)^2 + \frac{1}{2}(zx - xy)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bổ đề đã rõ vậy kết hợp với đạo hàm như thế nào? Ta xét ví dụ sau đây thay cho lời giới thiệu phương pháp.¹

1.2 BỔ đề kết hợp với đạo hàm

Ví dụ 1 (Lê Hữu Điền Khuê).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a^2 + (a - 1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b - 1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c - 1)^2} \geq 1$$

¹Trong bài viết, nếu không cần nhấn mạnh sẽ gọi sự kết hợp này đơn giản là **Bổ đề**

Phân tích: Quá giống về giả thiết và kết luận so với bổ đề nhưng không may ở chỗ

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{a^2 + a + 1}$$

BĐT này không phải lúc nào cũng đúng. Vậy ta sẽ điều chỉnh lại một tí, ta sẽ đặt câu hỏi tại sao phải là $a^2 + a + 1$? bổ đề yêu cầu là phải có dạng $a^{2m} + a^m + 1$ là được, vậy thì $a^4 + a^2 + 1$ được hay $a^6 + a^3 + 1$...

Hóa ra vấn đề là ta cần có một đánh giá

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{a^{2m} + a^m + 1}$$

đúng với mọi a dương, đồng nghĩa để chứng minh bài toán ta chỉ việc tìm m . Ta sẽ xem

$$f(a) = \frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} - \frac{1}{a^{2m} + a^m + 1}$$

là một hàm số theo biến a và nhiệm vụ cuối cùng là tìm m sao cho hàm số đạt GTNN là 0 khi $a = 1$.

Vẫn còn quá phức tạp, ta đang mò mẫm để đi chứ không phải giải một bài hần hoi nên chưa cần đảm bảo cần và đủ. Ta sẽ giảm nhẹ lại, cực trị tại $a = 1$ thì sao? (vì có một tham số cần 1 phương trình là giải được) hy vọng đó sẽ là GTNN.

$$f'(a) = \frac{-8a + 2}{(3a^2 + (a-1)^2)^2} + \frac{2ma^{2m-1} + ma^{m-1}}{(a^{2m} + a^m + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{3} + \frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy ta chỉ cần chứng tỏ

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{a^4 + a^2 + 1}$$

Thật vậy, BĐT trên tương đương:

$$a(a-1)^2(a+2) \geq 0$$

LỜI GIẢI. Ta có đánh giá sau (tương tự cho b, c):

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{a^4 + a^2 + 1}$$

Vì vậy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \\ & \geq \frac{1}{a^4 + a^2 + 1} + \frac{1}{b^4 + b^2 + 1} + \frac{1}{c^4 + c^2 + 1} \end{aligned}$$

theo bổ đề trên ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Nhận xét:

- Tìm ra tham số m để có đánh giá trên chỉ là điều kiện cần chứ chưa phải là đủ, vậy nên cần kiểm tra lại mà đơn giản nhất là biến đổi tương đương.
- Cách tìm m bằng đạo hàm thật sự không mới, tuy nhiên sự kết hợp của bổ đề và phương pháp này thật sự sẽ cho một cách nhìn mới hoàn toàn.

2 Các ví dụ áp dụng

2.1 Các ví dụ cơ bản

Ví dụ 2 (Đề thi chọn đội tuyển Anh dự thi IMO 2005).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3$$

Phân tích: Ta sẽ tìm m để có đánh giá

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} \geq \frac{1}{a^{2m} + a^m + 1}$$

Thực hiện như trên ta được $m = \frac{3}{4}$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+3}{(a+1)^2} &\geq \frac{3}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}} + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 3)}{(x^4 + 1)^2 (x^6 + x^3 + 1)} &\geq 0 \end{aligned}$$

với $x = a^{\frac{1}{4}}$, BĐT hiển nhiên đúng. Vậy nên:

$$\begin{aligned} \frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \\ \geq \frac{3}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}} + 1} + \frac{3}{b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{4}} + 1} + \frac{3}{c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{4}} + 1} \end{aligned}$$

Theo bổ đề trên ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 3 (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2005).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(b+1)^3} + \frac{1}{(c+1)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Phân tích: Ta tìm m để có đánh giá:

$$\frac{8}{(a+1)^3} \geq \frac{3}{a^{2m} + a^m + 1}$$

và tìm được $m = \frac{3}{2}$.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\frac{8}{(a+1)^3} \geq \frac{3}{a^3 + a^{\frac{3}{2}} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 (5x^4 + 10x^3 + 6a^2 + 10a + 5)}{(x^2 + 1)^3 (x^6 + x^3 + 1)}$$

với $x = \sqrt{a}$.

Đánh giá tương tự cho b, c kết hợp với bổ đề ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Kết thúc ở đây hoặc tiếp tục đưa ra hàng loạt ví dụ tương tự chắc chắn sẽ làm bạn đọc cảm thấy đơn điệu vì chưa thấy hiệu quả. Tiếp đến ta sẽ đến với một số bài toán mà dạng ban đầu khó mà nghĩ đến bổ đề.

Ví dụ 4 (Vasile Cirtoaje - Discrete Inequalities Vol 3).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + 25a + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2 + 25b + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2 + 25c + 1}} \geq 1$$

Phân tích: Ta vẫn chọn kiểu đánh giá:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + 25a + 1}} \geq \frac{1}{a^{2m} + a^m + 1}$$

và chọn được $m = \frac{2}{3}$. Lý do vì sao ta mạnh dạn chọn cách đánh giá này xin được giải thích sau.

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2 + 25a + 1}} \geq \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a} - 1)^2 (\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a} + 1)}{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} + 1\right)^3 (a^2 + 35a + 1)} \geq 0$$

Đánh giá tương tự cho b, c kết hợp với bổ đề ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Ví dụ 5 (MEMO, 2012).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{16a^2 + 9} + \sqrt{16b^2 + 9} + \sqrt{16c^2 + 9} \geq 4(a + b + c) + 3$$

Phân tích: Ta tìm m để có đánh giá:

$$\sqrt{16a^2 + 9} - 4a \geq \frac{3}{a^{2m} + a^m + 1}$$

như trên ta tìm được $m = \frac{4}{5}$. Vấn đề còn lại là biến đổi tương đương để chứng minh đánh giá vừa chọn là đúng.

LỜI GIẢI. Để thuận lợi ta đặt $a = x^5$ ta có:

$$\sqrt{16a^2 + 9} - 4a \geq \frac{3}{a^{\frac{8}{5}} + a^{\frac{4}{5}} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{\sqrt{16x^{10} + 9} + 4x^5} \geq \frac{3}{x^8 + x^4 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (3x^8 + 3x^4 + 3 - 4x^5)^2 \geq 16x^{10} + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^4(x-1)^2(3x^{10} + 6x^9 + 9x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 2x^2 + 4x + 6) \geq 0$$

Vậy đánh giá trên luôn đúng tức:

$$\begin{aligned} & \sqrt{16a^2 + 9} - 4a + \sqrt{16b^2 + 9} - 4b + \sqrt{16c^2 + 9} - 4c \\ & \geq \frac{3}{a^{\frac{8}{5}} + a^{\frac{4}{5}} + 1} + \frac{3}{a^{\frac{8}{5}} + a^{\frac{4}{5}} + 1} + \frac{3}{a^{\frac{8}{5}} + a^{\frac{4}{5}} + 1} \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề trên ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Bước chứng minh đánh giá tương đối nặng về kỹ năng dù không khó lắm. Thầy giáo Võ Quốc Bá Cẩn đã khắc phục nó bằng cách thực hiện 2 bước đánh giá phụ có thể tóm tắt như sau:

$$\sqrt{16a^2 + 9} - 4a \geq \frac{2a + 3}{2a^2 + 2a + 1} \geq \frac{3}{a^{\frac{8}{5}} + a^{\frac{4}{5}} + 1}$$

□

Tiếp đến ta bắt đầu với các ví dụ mà giả thiết khác đi dần dần.

Ví dụ 6 (Azerbaijan NMO 2015).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = \frac{1}{8}$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{15}{16}$$

Phân tích: Để có thể vận dụng bổ đề ta thay đổi giả thiết lại bằng cách đặt

$$x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}; z = \frac{c}{2}$$

Khi đó $xyz = 1$ và BDT được viết lại là:

$$4(x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq 15$$

đến đây ý tưởng bài toán đã khá rõ ràng là sử dụng BDT AM - GM, nếu vậy bài giải chỉ dừng lại ở đó. Ta sẽ tìm một lời giải dựa trên bổ đề trên nếu làm được chắc chắn đây là một lời giải thú vị đẹp mắt, tức ta cần tìm m cho đánh giá:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} \geq \frac{15}{x^{2m} + x^m + 1}$$

và nhận được $m = \frac{-6}{5}$.

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} \geq \frac{15}{x^{\frac{-12}{5}} + x^{\frac{-6}{5}} + 1}$$

thật vậy,

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} \geq \frac{15}{x^{\frac{-12}{5}} + x^{\frac{-6}{5}} + 1}$$

$$\Leftrightarrow 4t^{10} + \frac{1}{t^{10}} \geq \frac{15t^{12}}{1 + t^6 + t^{12}}$$

$$\Leftrightarrow (4t^{20} + 1)(1 + t^6 + t^{12}) \geq 15t^{22}$$

Với $t^5 = a$, BDT cuối đúng theo AM - GM.

Đánh giá tương tự cho các biến b, c kết hợp với bổ đề ta được điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $a = b = c = \frac{1}{2}$. $\square$

Nhận xét: Qua bài giải ta thấy bổ đề có thể chứng minh được cả BDT cổ điển AM - GM (đương nhiên đang nói là ba biến).

Ví dụ 7 (AM - GM 3 biến).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Phân tích: Trước hết ta chuẩn hóa $abc = 1$ (để có thể vận dụng bổ đề) khi đó BDT cần chứng minh là:

$$a + b + c \geq 3$$

như trên ta sẽ tìm một đánh giá

$$a \geq \frac{3}{a^{2m} + a^m + 1}$$

và tìm được $m = -1$. Việc hoàn thành bài giải dành lại cho bạn đọc.

Nhận xét: Có vẻ như ta đã đem công cụ quá mạnh để xử lý một bài toán đơn giản, tuy nhiên ví dụ này là mấu chốt của vấn đề để giải thích lý do tại sao ta mạnh dạn chọn **Bổ đề** làm cấu hình để đánh giá:

- **Bổ đề** được chứng minh bằng BDT Cauchy dạng phân thức là hệ quả của BDT Cauchy, mà BDT Cauchy thì xuất phát từ đẳng thức Lagrange nên ta không hề trùng lặp khi dùng **Bổ đề** để chứng minh cho AM - GM ba biến như trên.
- Ta phải thừa nhận BDT AM - GM là BDT cổ điển được sử dụng nhiều (chính xác là rất nhiều) trong chứng minh BDT, ấy vậy mà bộ đôi trên lại có thể chứng minh được AM - GM. Điều đó cho ta lòng tin bộ đôi này có thể giải quyết được rất nhiều dạng toán chứ không phải hạn chế ở những dạng giống **Bổ đề**.

Câu hỏi đặt ra là một bài ngẫu nhiên có áp dụng bộ đôi này được không? Câu trả lời thật khó nói nó tùy thuộc vào mỗi người giải để thấy điều đó ta sẽ vào các bài toán sau:

2.2 Khai thác thêm bộ đôi phương pháp

Ví dụ 8 (**Vasile Cîrtoaje, 2012**).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{25a^2 + 144} + \sqrt{25b^2 + 144} + \sqrt{25c^2 + 144} \leq 5(a + b + c) + 24$$

Phân tích: Ta sẽ tìm m cho đánh giá

$$5a + 9 - \sqrt{25a^2 + 144} \geq \frac{3}{a^{2m} + a^m + 1}$$

nhưng thật không may là không có m nào thỏa mãn lý do là khi a tiến về 0 thì vế phải là một số âm. Gấp giấy lại và kết luận bộ đôi phương pháp và bổ đề không dùng được nữa rồi, nếu bạn đọc suy nghĩ vậy thì thật là tiếc. Ta để ý một chút, lý do làm vế phải âm là do số 144 trong căn vì vậy số 9 đằng trước không đủ để trị! Vậy tại sao phải là 9 thay số khác được không? bao nhiêu là đủ?

Với phân tích vậy ta tiến hành giải luôn, chắc chắn bạn đọc sẽ chọn số 12 thay cho số 9 như sau:

$$5a + 12 - \sqrt{25a^2 + 144} \geq \frac{12}{a^{2m} + a^m + 1}$$

và tìm được $m = \frac{-10}{13}$. Việc còn lại là chứng minh đánh giá như sau:

$$\begin{aligned} 5a + 12 - \sqrt{25a^2 + 144} &\geq \frac{12}{a^{\frac{-20}{13}} + a^{\frac{-10}{13}} + 1} \\ \Leftrightarrow (5t^{20} + 10t^{10} - 12t^7 + 10)^2 &\geq t^{14} (25t^{26} + 144) \\ \Leftrightarrow 20(5t^{30} - 6t^{27} + 10t^{20} - 12t^{17} + 10t^{10} - 12t^7 + 5) &\geq 0 \end{aligned}$$

với $t^{13} = a$. Có thể dùng hàm số để chứng BDT trên nhưng có vẻ phức tạp, ở đây ta sẽ dùng AM - GM với cách ghép cặp cũng khá thú vị:

$$\begin{cases} 5t^{30} + t^{12} \geq 6t^{27} \\ 9t^{20} + 3t^8 \geq 12t^{17} \\ 8t^{10} + 4t \geq 12t^7 \end{cases}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} t^{20} - t^{12} + 2t^{10} - 3t^8 - 4t + 5 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 6t^{20} + 12t^{10} + 30 &\geq 6t^{12} + 18t^8 + 24t \end{aligned}$$

ta lại ghép cặp dùng AM - GM:

$$\begin{cases} 6t^{20} + 4 \geq 10t^{12} \\ 12t^{10} + 2t^{12} + 4 \geq 18t^8 \\ 2t^{12} + 22 \geq 24t \end{cases}$$

Vậy đánh giá trên được chứng minh. Hoàn thành bài giải dành cho bạn đọc.

Nhận xét: Chắc chắn bạn đọc chưa thỏa mãn với bài giải trên, đúng vậy ví dụ này được chọn không phải để phô diễn kỹ thuật tính toán. Một câu hỏi đặt ra là với bài toán khác thì số thêm vào là bao nhiêu? Chắc chắn một điều trực giác sẽ không đứng về phía chúng ta nữa.

Ta sẽ điều chỉnh cách đánh giá một tí như là một cách để lý giải cho con số 12

$$5a + 9 + k - \sqrt{25a^2 + 144} \geq \frac{3 + 3k}{a^{2m} + a^m + 1}$$

Để đảm bảo vế phải không âm ta phải chọn $k \geq 3$, khi đó áp dụng phương pháp tìm m như trên ta được:

$$\frac{-40}{13m} - 1 = k \geq 3 \Leftrightarrow \frac{-10}{13} \leq m < 0$$

Vậy bài giải trên may mắn chọn $m = \frac{-10}{13}$ tương ứng với $k = 3$. Qua đó nếu ta chọn k là số khác lớn hơn 3 vẫn có được một đánh giá tuy nhiên việc kiểm chứng đánh giá có đúng hoàn toàn hay không, khá là khó vì m là số khá xấu. Hơn nữa k chỉ nên chọn gần 3 (biên của điều kiện) nếu xa ra chắc chắn đánh giá đó sẽ sai.

Để thấy được việc chọn k không được máy móc như thế nào ta cần một ví dụ nữa nhưng trước hết ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 9 (**Bosnia and Herzegovina TST 2015 day 1 problem 1**).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán GTNN là 2 và dễ nhất là sử dụng phương pháp tiếp tuyến để làm. Vậy là tốt khi thi cử thế nhưng ta đang tìm tòi với bộ đôi phương pháp và bổ đề nên ta thử tìm một lời giải thú vị dựa trên chúng.

Ta sẽ tìm m cho đánh giá:

$$\frac{a+1}{a(a+2)} \geq \frac{2}{a^{2m} + a^m + 1}$$

và tìm được $m = \frac{5}{6}$. Tuy nhiên ta phải khéo léo một tí mới dùng được bổ đề vì giả thiết được suy ra là $abc \leq 1$. Vậy nên, với a, b, c thỏa giả thiết ta chọn một số $a' \geq a$ sao cho $a'bc = 1$ khi đó:

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geq \frac{a'+1}{a'(a'+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

Kết hợp đánh giá trên cho ba biến a', b, c ta hoàn thành bài toán.

Nhận xét: Ta được một kết quả chặt hơn làm khó được phương pháp tiếp tuyến là:

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)} \geq 2$$

Quay lại việc chọn k ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 10 (Tuymaada Olympiad 2014).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

LỜI GIẢI. Ta có:

$$\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{a^3+1}} \geq \frac{3}{2(a^{-3} + a^{-\frac{3}{2}} + 1)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^3} - 1)^2 (a^3 + 4\sqrt{a^3} + 1) \geq 0$$

Vậy với $abc \geq 1$ thỏa giả thiết ta luôn chọn được $a' \leq a$ sao cho $a'bc = 1$ khi đó:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{a^3+1}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{b^3+1}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{b^3+1}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{c^3+1}} \\ & \geq \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{a'^3+1}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{b^3+1}} + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{2}{c^3+1}} \\ & \geq \frac{3}{2(a'^{-3} + a'^{-\frac{3}{2}} + 1)} + \frac{3}{2(b^{-3} + b^{-\frac{3}{2}} + 1)} + \frac{3}{2(c^{-3} + c^{-\frac{3}{2}} + 1)} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

Nhận xét:

- Bài toán có thể làm mạnh hơn bằng cách thay giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ bằng $abc = 1$.
- Để có được đánh giá như trên ta đã kết hợp cả 2 kỹ năng của 2 ví dụ phân tích rất kỹ bên trên tức chọn đồng thời k, m cho đánh giá:

$$1 + k - \sqrt{\frac{2}{a^3+1}} \geq \frac{3k}{a^{2m} + a^m + 1}$$

với $k \geq \sqrt{2} - 1$ và để đơn giản ta đã chọn $k = \frac{1}{2}$ tương ứng $m = -\frac{3}{2}$. Bạn đọc hãy thử tìm với $k = 1$ sẽ thấy không có m mặc dù k thỏa mãn điều kiện, điều đó chứng tỏ chọn k phải gần biên của điều kiện mới có hy vọng đánh giá chặt.

Tiếp tục ta sẽ điếm qua một số bài toán để thấy tính hiệu quả của **Bộ đôi** trên:

2.3 Các ví dụ nâng cao

Ví dụ 11 (JBMO TST - Macedonia 2013).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{2}\sqrt{a} + \frac{1}{1+a} \geq \frac{3}{a^0 + a^0 + 1} = 1$
(do đó giả thiết $abc = 1$ là thừa chưa dùng.) $\square$

Ví dụ 12 (Zdravko Cvetkovski).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{3} - \frac{a}{a^2 + 2} + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3(a^2 + a + 1)}$ $\square$

Mở rộng:

Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$ và a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 thì BDT sau luôn đúng:

$$\frac{a}{a^2 + k} + \frac{b}{b^2 + k} + \frac{c}{c^2 + k} \leq \frac{3}{k + 1}$$

Ví dụ 13 (Võ Quốc Bá Cẩn).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a^3 + 1}\right)^5 + \left(\frac{b}{b^3 + 1}\right)^5 + \left(\frac{c}{c^3 + 1}\right)^5 \leq \frac{3}{2^5}$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{2^5} - \left(\frac{a}{a^3 + 1}\right)^5 + \frac{1}{2^6} \geq \frac{3}{2^6(a^{-10} + a^{-5} + 1)}$ $\square$

Ví dụ 14 (Crux Mathematicorum - Mihaly Bencze).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{b}{b^2 + b + 1} + \frac{c}{c^2 + c + 1} \leq \frac{1}{a + 2} + \frac{1}{b + 2} + \frac{1}{c + 2}$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{a + 2} - \frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{9} \geq \frac{1}{3(a^2 + a + 1)}$ $\square$

Cuối cùng ta sẽ đến với các bài toán từ giả thiết đến dạng toán đều khác hoàn toàn với bổ đề, thế nhưng khi ta sử dụng đôi bổ đề và phương pháp trong bài vào thì được kết quả hoàn toàn bất ngờ (xin nhắc lại niềm tin để ta thực hiện bước đánh giá này đó là bổ đề rất chặt và khi kết hợp với phương pháp trên có thể chứng minh được BDT AM - GM).

Ví dụ 15 (Vasile Cirtoaje, GM - B, 9 - 10, 1992).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

HƯỚNG DẪN. Ta chứng minh bài toán tương đương với giả thiết $xyz = 1$:

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}} + \sqrt{\frac{2}{y+1}} + \sqrt{\frac{2}{z+1}} \leq 3$$

Sử dụng đánh giá:

$$1 - \sqrt{\frac{2}{x+1}} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2(x^{-1} + x^{\frac{-1}{2}} + 1)}$$

□

Ví dụ 16 (IMO - 2001, Problem 2).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

HƯỚNG DẪN. Chuẩn hóa $abc = 1$ ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{8}{a}}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + \frac{8}{b}}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \frac{8}{c}}} \geq 1$$

Sử dụng đánh giá:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{8}{a}}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{a^{\frac{-8}{3}} + a^{\frac{-4}{3}} + 1}$$

□

Ví dụ 17 (Jedaihan - Trích "BĐT và những lời giải hay").

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^4 + 2b^2c^2}{a^2 + 2bc}} + \sqrt{\frac{b^4 + 2c^2a^2}{b^2 + 2ca}} + \sqrt{\frac{c^4 + 2a^2b^2}{c^2 + 2ab}} \geq a + b + c$$

HƯỚNG DẪN. Chuẩn hóa $abc = 1$ ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^6 + 2}{a^4 + 2a}} + \sqrt{\frac{b^6 + 2}{b^4 + 2b}} + \sqrt{\frac{c^6 + 2}{c^4 + 2c}} \geq a + b + c$$

Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt{\frac{a^6 + 2}{a^4 + 2a}} - a + 1 \geq \frac{3}{a^2 + a + 1}$$

□

Ví dụ 18 (THTT - T9/460).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 b^2 c^2}{bc+1} + \frac{a^2 b^4 c^2}{ca+1} + \frac{a^2 b^2 c^4}{ab+1} \geq \frac{3}{2}$$

HƯỚNG DẪN. Với mỗi a, b, c thỏa giả thiết ta luôn chọn được $a' \leq a$ thỏa mãn $a'bc = 1$. Khi đó BĐT trở thành:

$$\frac{a'^3}{a'+1} + \frac{b^3}{b+1} + \frac{c^3}{c+1} \geq \frac{3}{2}$$

Sử dụng đánh giá:

$$\frac{b^3}{b+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2(b^{-5} + b^{\frac{-5}{2}} + 1)}$$

□

Ví dụ 19 (THTT - T8/454).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + 3 \geq \frac{5}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

HƯỚNG DẪN. Ta chứng minh bài toán tương đương với giả thiết $xyz = 1$ sau:

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+1}\right)^2 + 3 \geq \frac{5}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

Sử dụng đánh giá:

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + 1 - \frac{5}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2(x^{\frac{-3}{2}} + x^{\frac{-3}{4}} + 1)}$$

□

Ví dụ 20 (China Northern Mathematical Olympiad 2006).

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+9}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+9}{2c^2+(a+b)^2} \leq 5$$

LỜI GIẢI. Bài toán tương đương với:

$$\frac{5}{3} - \frac{a^2+9}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{5}{3} - \frac{b^2+9}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{5}{3} - \frac{c^2+9}{2c^2+(3-c)^2} \geq 0$$

Với mỗi a, b, c thỏa giả thiết, không mất tính tổng quát ta xem $a = \min \{a, b, c\}$. Khi đó tồn tại a' thỏa $a \leq a' \leq 1$ sao cho $a'bc = 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{3} - \frac{a^2 + 9}{2a^2 + (3-a)^2} + \frac{5}{3} - \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (3-b)^2} + \frac{5}{3} - \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (3-c)^2} \\ & \geq \frac{5}{3} - \frac{a'^2 + 9}{2a'^2 + (3-a')^2} + \frac{5}{3} - \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (3-b)^2} + \frac{5}{3} - \frac{c^2 + 9}{2c^2 + (3-c)^2} \end{aligned}$$

Đến đây ta chỉ cần sử dụng đánh giá sau:

$$\frac{5}{3} - \frac{b^2 + 9}{2b^2 + (3-b)^2} + \frac{1}{21} \geq \frac{1}{7(b^{14} + b^7 + 1)}$$

□

Ví dụ 21 (Đề chọn đội tuyển Tỉnh Nghệ An năm 2015 - 2016).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{a}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2c+2a}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b}} \geq 3$$

Phân tích: Có thể tiếp cận bài toán bằng Cauchy (tương tự như chứng minh cho BĐT Nesbitt). Ở đây ta có sẽ kết hợp với bổ đề để cho ra một lời giải mới. Trước tiên ta chuẩn hóa $a + b + c = 3$ (không chuẩn hóa $abc = 1$ vì khi đó BĐT không tách biến). Khi đó BĐT cần chứng minh là:

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} + \sqrt{\frac{a}{6-2a}} + \sqrt{\frac{b}{6-2b}} + \sqrt{\frac{c}{6-2c}} \geq 3$$

Đến đây có 2 vấn đề phát sinh:

- Giả thiết $a + b + c = 3$ không dùng được **Bổ đề**.
- Nếu làm như các bài trên ta sẽ đánh giá $a' \geq a$ với hy vọng $a'bc = 1$ và:

$$\frac{a}{3-a} + \sqrt{\frac{a}{6-2a}} \geq \frac{a'}{3-a'} + \sqrt{\frac{a'}{6-2a'}}$$

Tuy nhiên hàm số $f(a) = \frac{a}{3-a} + \sqrt{\frac{a}{6-2a}}$ là hàm tăng vì vậy đánh giá này không dùng được.

Loay hoay mãi cuối bài viết mới nhận ra một điều rất đơn giản là **Bổ đề** không chỉ đúng với $abc = 1$ mà đúng với cả $a + b + c = 3, ab + bc + ca = 3$. Vậy thì 2 khó khăn trên và cả những khó khăn phải lách đi bằng hàm tăng giảm đều được giải quyết một cách nhẹ nhàng.

LỜI GIẢI. Ta sử dụng đánh giá:

$$\frac{a}{3-a} + \sqrt{\frac{a}{6-2a}} \geq \frac{3}{a^{\frac{-9}{4}} + a^{\frac{-9}{8}} + 1}$$

Tương tự với b, c . Kết hợp với **Bổ đề** (đương nhiên đang nói trong trường hợp $a+b+c=3$) ta được điều phải chứng minh. $\square$

3 Kết luận

Bộ đôi **Bổ đề** trên rất hiệu quả với các bài toán tách biến với giả thiết abc là hằng số, không những vậy với cả những bài không tách biến ta có thể chuẩn hóa để đưa về dạng tách biến cũng có thể áp dụng được. Đặc biệt với một số bài có giả thiết tổng $a + b + c$ hoặc $ab + bc + ca$ là hằng số nếu khéo léo vẫn có thể áp dụng được hiển nhiên đây không phải là vận năng nên sẽ có những bài không áp dụng được đơn cử như bài toán đơn giản sau:

Romania 2005

Với ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Không thể dùng được kỹ thuật trong bài lý do:

- Nếu làm mạnh giả thiết lên là $abc = 1$ thì BĐT trên không còn đúng nữa.
- Nếu dùng **Bổ đề** với giả thiết $a + b + c = 3$,² thì không tìm được m .

Qua bài viết bạn đọc có thể lựa chọn mình một **Bổ đề** khác (lưu ý **Bổ đề** phải thật sự chặt và mạnh) áp dụng kèm với phương pháp trong bài nhất định sẽ xuất hiện một công cụ, một lời giải đẹp.

²Xin nhắc lại khi đó **Bổ đề** vẫn còn đúng

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1 (Algebraic Inequalities).

Với ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ca + a^2} \geq 1$$

HƯỚNG DẪN. Kết quả trực tiếp của **Bổ đề**. □

Bài tập 2 (Vũ Đình Quý).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $1 - \frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2(a^{-4} + a^{-2} + 1)}$ □

Bài tập 3 (Trần Quốc Luật, Võ Quốc Bá Cẩn).

Với ba số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^3 + 1} + \frac{b}{2b^3 + 1} + \frac{c}{2c^3 + 1} \leq 1$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{3} - \frac{a}{2a^3 + 1} + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{2(a^{-4} + a^{-2} + 1)}$ □

Bài tập 4 (Discrete vol 3).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - a + 1} + \sqrt{b^2 - b + 1} + \sqrt{c^2 - c + 1} \geq a + b + c$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\sqrt{a^2 - a + 1} - a + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2(a^2 + a + 1)}$ □

Bài tập 5 (Đề chọn đội tuyển Tỉnh Đắk Lắk lần 1 năm 2016 - 2017).

Với ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng đánh giá: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2+a} + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{2(a^{\frac{-4}{3}} + a^{\frac{-2}{3}} + 1)}$ □