

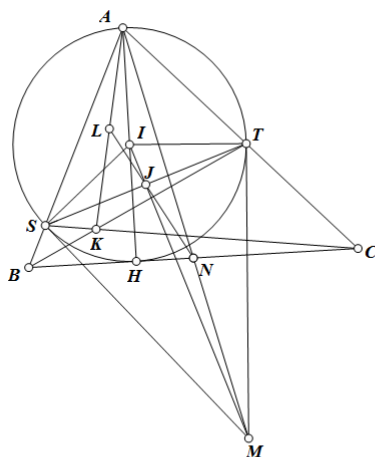
Bàn một chút về hai lời giải và các mở rộng cho một bài toán hay trên báo THPT

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Bài toán(T8/466-Hồ Quang Vinh-THPT): Cho tam giác ABC có đường cao AH . Đường tròn tâm I đường kính AH cắt AB, AC tại S, T . BT cắt CS tại K . Gọi tiếp tuyến tại S và T của (I) cắt nhau ở M . MA giao BC tại N . IM cắt ST tại J . Chứng minh rằng NJ đi qua trung điểm AK .

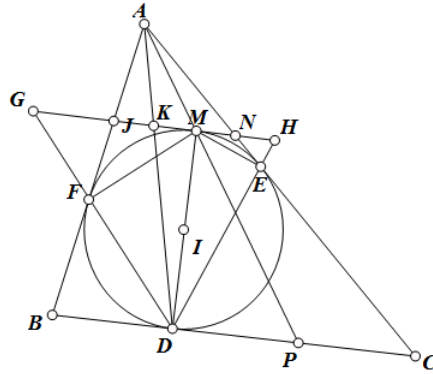
Bài toán trên là một trong các bài toán tôi được nêu tên xong lời giải của tác giả lại sử dụng tới hàng điểm điều hoà. Mặc dầu sẽ kéo ngắn lời giải xong sử dụng hàng điểm ở đây có lẽ cũng chưa thật cần thiết. Sau đây tôi xin giới thiệu lời giải mà tôi đã gửi toà soạn chỉ sử dụng kiến thức lớp 9, và qua đó thấy rõ được bản chất của bài toán là cấu hình nào.

Lời giải 1(Nguyễn Duy Khương):



Trước khi đi vào lời giải ta cần chứng minh 1 bổ đề nhỏ như sau: "Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . DM là đường

kính của (I) . Tiếp tuyến (I) tại M cắt DF, DE tại G và H . Gọi AD cắt GH tại K . Khi đó K là trung điểm GH ."



Chứng minh: Gọi GH cắt AB, AC tại J, N . Gọi AM cắt BC tại P . Ta dễ thấy rằng: $PC = BD$. Theo định lý Thales ta lại có được rằng: $\frac{GJ}{DB} = \frac{FJ}{FB} = \frac{FJ}{BD} \Rightarrow GJ = JF = JM$. Hoàn toàn tương tự ta có: $NM = NH = NE$. Lại theo định lý Thales ta có: $\frac{JK}{BD} = \frac{MN}{PC} (= \frac{AK}{AD})$ mà ta có được rằng $BD = PC$ nên ta thu ngay được rằng: $JK = MN$. Do đó $GJ + JK = JM + MN = JN$ và $KH = KM + MN + NH = JK + MN + KM = JN$ do đó $GK = KH (= JN)$ hay K là trung điểm GH .

Quay lại bài toán ban đầu, từ bài toán phụ ta dễ có được AM đi qua trung điểm BC hay N là trung điểm BC . Áp dụng định lý về đường thẳng Gauss cho tứ giác $ASTK$ với $TK \cap AS = B$ và $SK \cap AT = C$ thì do N là trung điểm BC và J là trung điểm ST (hiển nhiên J là trung điểm ST do M là giao 2 tiếp tuyến của (I) từ S và T) nên ta thu ngay được rằng NJ đi qua trung điểm AK (đpcm).

Chú ý: Đường thẳng Gauss là một khái niệm không hề phức tạp và các bạn học sinh

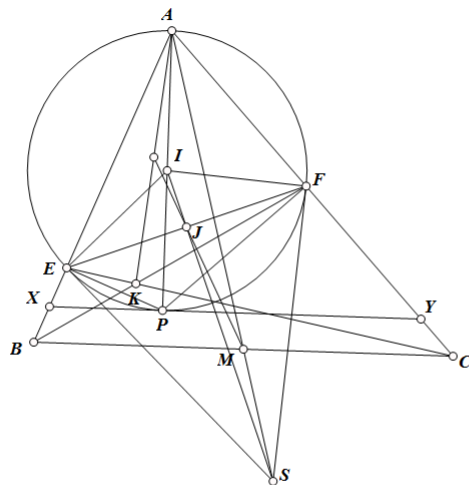
THCS hoàn toàn có khả năng tự chứng minh được bằng định lí *Menelaus*: "Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F$. Gọi H, I, J lần lượt là trung điểm AC, BD, EF . Khi đó H, I, J thẳng hàng và người ta gọi đây là đường thẳng *Gauss*."

Lời giải 2(Lời giải gốc): Điểm khác biệt giữa hai lời giải này nằm ở đoạn chứng N là trung điểm BC . Gọi A_2 là giao điểm của MA với (I) ($A_2 \neq A$). Khi đó ta thấy rằng: ATA_2S là 1 tứ giác điều hoà. Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (I) thế thì có: $(At, AA_2, AT, AS) = -1$. Do $AH \perp BC$ nên $At \parallel BC$. Vậy áp dụng tính chất chùm điều hoà ta có: N là trung điểm BC . Đến đây ta tiếp tục giải như lời giải thứ nhất.

Nhận xét: Ở lời giải thứ hai thì ta thấy rằng việc sử dụng định lí về hàng chùm điều hoà đã kéo ngắn lại các đoạn biến đổi trong lời giải thứ nhất. Điểm hay nữa của lời giải này là nó có thể dùng cho bài toán mở rộng.

Bây giờ xin bàn về vấn đề thứ hai chính là các mở rộng của bài toán này. Trong lời giải tổng quát thì ý tưởng lời giải thứ hai đã phát huy được công hiệu tối đa.

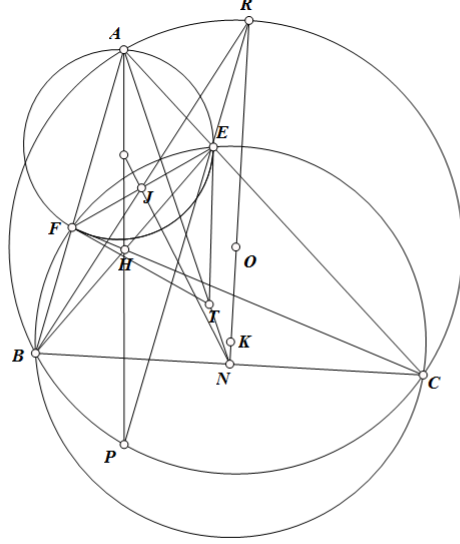
Bài toán mở rộng thứ nhất(Nguyễn Xuân Hùng-GV THPT chuyên Hà Nội Amsterdam): Cho tam giác ABC và lấy 1 điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho AP vuông góc BC . E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AB và AC . Tiếp tuyến tại E và F của đường tròn (AEF) cắt nhau ở S . Gọi I là trung điểm AP . Gọi SI cắt EF tại điểm J . BF cắt CE tại điểm K và AS cắt BC tại điểm M . Chứng minh rằng: MJ chia đôi AK .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Bài toán này thực chất là mở rộng xong cũng không thực sự khó cho lắm. Qua P kẻ tiếp tuyến với (AEF) cắt AB, AC tại hai điểm X, Y . Áp dụng bài toán ban đầu ta có: AS đi qua trung điểm XY . Áp dụng bổ đề hình thang thì ta có: AS cũng đi qua trung điểm BC . Do đó thu được M là trung điểm BC . Đến đây lại áp dụng đường thẳng *Gauss* cho tứ giác $AEKF$ thì do J là trung điểm EF , M lại là trung điểm BC nên ta có đpcm.

Cuối cùng để các bạn cùng nghiệm lại bài toán từ đầu, sau đây mời các bạn thưởng thức lời giải của tôi cho mở rộng của bạn **Nguyễn Xuân Anh Quân, 11 Toán, chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam** đề nghị trên báo **THTT**:

Bài toán mở rộng thứ hai: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . (K) bất kì qua B, C cắt AB, AC tại các điểm E, F . Các tiếp tuyến tại E, F của (AEF) cắt nhau ở T . AT cắt BC tại điểm N . Gọi $H = BE \cap CF$, $AH \cap (O) = P (\neq A)$. PE cắt (O) tại điểm $R \neq P$. BR cắt EF tại điểm J . Chứng minh rằng: NJ chia đôi AH .

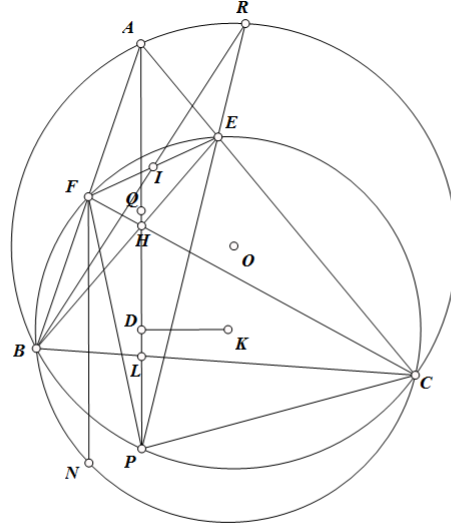


Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Bài toán tổng quát này thực chất là ghép của hai bài toán sau. Khi có được kết luận 2 bài phụ này ta áp đường thẳng *Gauss* cho tứ giác $AFHE$ với $HE \cap AF = B$ và $HF \cap AE = C$ là có được đpcm.

Bài toán 1: Cho tam giác ABC có F, E trên AB, AC sao cho tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Tiếp tuyến tại E, F của (AEF) cắt nhau ở T . Khi đó AT chia đôi BC .

Chứng minh: Gọi AT cắt lại (AEF) tại điểm L dĩ nhiên có tứ giác $AFLE$ điều hoà. Kẻ tiếp tuyến Ax của (AEF) . Ta có: $(Ax, AT, AE, AF) = -1 = (Ax, AT, AB, AC)$ mà ta có: $\angle xAE = \angle AEF = \angle ACB$ nên $Ax \parallel BC$. Do đó theo tính chất chùm điều hoà ta có AT chia đôi BC (đpcm).

Bài toán 2(Mở rộng bài toán Jeck Lim-Aops-Trần Quang Hùng): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Một đường tròn (K) qua B, C cắt AB, AC tại các điểm F, E . $BE \cap CF = H$. Gọi AH cắt lại (O) tại điểm thứ hai P . PE cắt lại (O) tại điểm R . Chứng minh rằng: BR chia đôi EF .



Chứng minh(Trần Quang Hùng-GV THPT chuyên KHTN): Gọi D là hình chiếu của K lên AH . Lấy N đối xứng F qua DK . Thế thì N thuộc (K) . Vì $\angle BCP = \angle BAP = \angle BFN = \angle BCN$ nên C, P, N thẳng hàng. Gọi AH cắt BC ở điểm L và lấy Q đối xứng P qua D . Ta có: $\angle FQA = \angle QFN = \angle FNC = \angle APC = \angle ABC$ nên $BFQL$ nội tiếp. Tương tự thì $CEQL$ cũng nội tiếp nên $AEQF$ cũng nội tiếp. Mặt khác $\triangle EFB \sim \triangle EQD$ nên thu được hai tam giác NFB và EQP đồng dạng. Vậy $\angle FBI = \angle EPQ = \angle ABR$ do đó thu được BR đi qua trung điểm EF . Vậy ta có đpcm.

Nhận xét: Bài toán 2 này đã từng xuất hiện trên tạp chí **Epsilon** số tháng **6/2015** trong bài viết của thầy **Trần Quang Hùng** và **Nguyễn Bảo Ngọc**