

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

I. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHIA HẾT

1. Sử dụng tính chất chia hết

Các tính chất thường dùng :

- Nếu $a : m$ và $a \pm b : m$ thì $b : m$.
- Nếu $a : b$, $b : c$ thì $a : c$.
- Nếu $ab : c$ mà $\text{ƯCLN}(b, c) = 1$ thì $a : c$.
- Nếu $a : m$, $b : n$ thì $ab : mn$.
- Nếu $a : b$, $a : c$ với $\text{ƯCLN}(b, c) = 1$ thì $a : bc$.
- Trong m số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng tồn tại một số là bội của m .

Ví dụ 1. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn : $3x + 17y = 159$ (1)

Giải :

Nhận xét $3x : 3$, $159 : 3$, suy ra $17y : 3$. Mà $\text{ƯCLN}(17, 3) = 1$ nên $y : 3$.

Đặt $y = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Thay vào phương trình (1) ta được :

$$3x + 17.3k = 159 \Leftrightarrow x + 17k = 53 \Leftrightarrow x = 53 - 17k.$$

Từ đó ta được nghiệm của phương trình (1) là : $\begin{cases} x = 53 - 17k \\ y = 3k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 - 2y^2 = 5$ (2)

Giải :

Từ (2) $\Rightarrow x$ phải là số lẻ. Đặt $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) và thay vào (2) ta được :

$$4k^2 + 4k + 1 - 2y^2 = 5 \Leftrightarrow 2(k^2 + k - 1) = y^2$$

Suy ra y^2 là số chẵn $\Rightarrow y$ là số chẵn.

Đặt $y = 2t$ ($t \in \mathbb{Z}$), thay vào (2.1) ta có :

$$2(k^2 + k - 1) = 4t^2 \Leftrightarrow k(k + 1) = 2t^2 + 1 \quad (2.1)$$

Ta thấy $k(k + 1)$ là số chẵn còn $2t^2 + 1$ là số lẻ nên phương trình (2.1) vô nghiệm.

Vậy phương trình (2) không có nghiệm nguyên.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

2. Đưa về phương trình ước số

Ví dụ 3. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thoả mãn phương trình : $xy - x - y = 2$ (3)

Giải :

Ta có (3) $\Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 3 \Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 3 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 3$

Suy ra $x - 1 \in U(3)$. Vì $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ nên ta có bảng sau :

$x - 1$	1	-1	3	-3
$y - 1$	3	-3	1	-1
x	2	0	4	-2
y	4	-2	2	0

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (3) là: $(4; 2), (2; 4), (0; -2), (-2; 0)$.

Ví dụ 4. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $x^2 - 2x - 4$ là một số chính phương.

Giải :

Đặt $x^2 - 2x - 4 = y^2$ ($y \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow (x - 1)^2 - y^2 = 5 \Leftrightarrow (x - 1 - y)(x - 1 + y) = 5$ (4).

Vì $5 = 1.5 = (-1).(-5)$, nên từ (4) ta có các trường hợp :

- Trường hợp 1 : $\begin{cases} x - 1 - y = 1 \\ x - 1 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ (thoả mãn).
- Trường hợp 2 : $\begin{cases} x - 1 - y = -1 \\ x - 1 + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2$ (thoả mãn).
- Trường hợp 3 : $\begin{cases} x - 1 - y = 5 \\ x - 1 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ (thoả mãn).
- Trường hợp 4 : $\begin{cases} x - 1 - y = -5 \\ x - 1 + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy các giá trị x cần tìm là $x \in \{-2; 4\}$.

3. Tách ra các giá trị nguyên

Ví dụ 5. Giải **Ví dụ 3** bằng cách khác.

Giải :

Biểu thị x theo y : $x(y - 1) = y + 2$ (5)

Ta thấy $y = 1$ không phải là nghiệm của phương trình (5) (vì khi đó (5) trở thành $0x = 3$, vô nghiệm), nên chia cả hai vế của (5) cho $y - 1 \neq 0$ ta được :

$$x = \frac{y + 2}{y - 1} = 1 + \frac{3}{y - 1}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{3}{y-1} \in \mathbb{Z}$, suy ra $y-1$ phải là ước của 3.

Ta lập bảng :

$y-1$	1	-1	3	-3
x	4	-2	2	0
y	2	0	4	-2

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình (3) là: $(4; 2)$, $(2; 4)$, $(0; -2)$, $(-2; 0)$.

BÀI TẬP

1. Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình sau :

- a) $2x + 3y = 156$; b) $3xy + x - y = 1$; c) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 7$;
 d) $x^3 - y^3 = 91$; e) $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$; f) $x^2 - 2y^2 = 5$.

2. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(1).f(2) = 35$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

II. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ TỪNG VẾ

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

Ví dụ 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $9x + 2 = y^2 + y$ (6)

Giải :

Viết lại phương trình thành : $9x + 2 = y(y + 1)$ (6.1)

Ta thấy vế trái của (6.1) là số chia cho 3 dư 2 nên $y(y + 1)$ chia cho 3 dư 2.

Nếu y chia hết cho 3 hoặc y chia cho 3 dư 2 thì $y(y + 1)$ đều chia hết cho 3, trái với kết luận trên.

Do đó y chia cho 3 dư 1. Đặt $y = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $y + 1 = 3k + 2$. Khi đó ta có :

$$9x + 2 = (3k + 1)(3k + 2) \Leftrightarrow 9x = 9k(k + 1) \Leftrightarrow x = k(k + 1).$$

Thử lại $x = k(k + 1)$ và $y = 3k + 1$ thoả mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình (6) là $x = k(k + 1)$ và $y = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2. Chứng minh phương trình vô nghiệm

Ta chứng minh hai vế khi chia cho cùng một số không thể cùng một số dư.

Chú ý : Hai số $a - b$ và $a + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) có cùng tính chẵn lẻ.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Thật vậy : Vì $(a - b) + (a + b) = 2a$ là một số chẵn nên $a - b$ và $a + b$ hoặc cùng là số chẵn, hoặc cùng là số lẻ, tức là chúng cùng tính chẵn lẻ.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên :

a) $x^2 - y^2 = 2006$ (7)

b) $x^2 + y^2 = 2007$ (8)

Giải :

a) *Cách 1.* Phương trình (7) viết thành : $(x - y)(x + y) = 2006$ (7.1)

Vì $(x - y) + (x + y) = 2x$ là số nguyên chẵn nên $(x - y)$ và $(x + y)$ cùng tính chẵn lẻ. Từ (7.1) suy ra $(x - y)$ và $(x + y)$ đều chẵn. Do đó $(x - y)(x + y)$ chia hết cho 4. Nhưng 2006 không chia hết cho 4. Từ đó suy ra (7.1) vô nghiệm.

Từ đó phương trình (7) vô nghiệm.

Cách 2. Số chính phương chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. Do đó x^2, y^2 chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1. Suy ra $x^2 - y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 3. Còn vế phải 2006 chia cho 4 dư 2.

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên.

b) x^2, y^2 chia cho 4 có số dư 0, 1 nên $x^2 + y^2$ chia cho 4 có số dư 0, 1, 2. Còn vế phải 2007 chia cho 4 dư 3.

Vậy phương trình (8) không có nghiệm nguyên.

BÀI TẬP

3. Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $3x^2 - 4y^2 = 13$;

b) $19x^2 + 28y^2 = 2009$;

c) $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$;

d) $x^2 - 4y^2 = 12345...20082009$

4. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2008$$

(Trích đề thi HSG lớp 8, huyện Thái Thụy 2007 – 2008)

5. Tồn tại hay không số nguyên n thỏa mãn : $n^3 + 2006n = 2008^{2007} + 1$

(Trích đề thi HSG lớp 8, huyện Thái Thụy 2006 – 2007)

6. Chứng minh rằng số $A = 100...0500...01$ không là lập phương của một số tự nhiên.

49 cs 0 50 cs 0

III. PHƯƠNG PHÁP DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Sắp thứ tự các ẩn

Ví dụ 8. Tìm ba số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.

Giải :

Cách 1. Gọi các số nguyên dương phải tìm là x, y, z . Theo đề bài ta có :

$$x + y + z = xyz \quad (9)$$

Ta thấy x, y, z có vai trò như nhau nên ta có thể sắp thứ tự giá trị của các ẩn, chẳng hạn $1 \leq x \leq y \leq z$ (*) mà không làm mất tính tổng quát của bài toán.

Từ (9) ta có $xyz = x + y + z \leq 3z \Rightarrow xy \leq 3$ (do $z > 0$).

Từ đó $xy \in \{1; 2; 3\}$ (vì x, y nguyên dương). Xét ba trường hợp :

- Với $xy = 1$, ta có $x = 1$ và $y = 1$. Thay vào (9) ta được $2 + z = z$, loại.
- Với $xy = 2$, ta có $x = 1, y = 2$. Thay vào (9) ta được $z = 3$.
- Với $xy = 3$, ta có $x = 1, y = 3$. Thay vào (9) ta được $z = 2$, loại vì $y \leq z$.

Vậy ba số cần tìm là $1; 2; 3$.

Cách 2. Chia hai vế của (9) cho $xyz > 0$ ta được : $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ (9.1)

Giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Từ (9.1) suy ra : $1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$.

Suy ra $\frac{3}{x^2} \geq 1$, do đó $x^2 \leq 3$ hay $x = 1$ (vì x nguyên dương).

Thay $x = 1$ vào (9.1) : $1 + y + z = yz \Leftrightarrow (y - 1)(z - 1) = 2$.

Do $0 \leq y - 1 \leq z - 1$, nên ta chỉ có một trường hợp:

$$y - 1 = 1 \text{ và } z - 1 = 2 \text{ hay } y = 2 \text{ và } z = 3.$$

Vậy ba số cần tìm là $1; 2; 3$.

2. Xét từng khoảng giá trị của ẩn

Ví dụ 9. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ (10)

Giải :

Cách 1. Do x, y có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $1 \leq x \leq y$. Từ (10) ta suy ra

$$\frac{1}{3} \geq \frac{2}{y} \Rightarrow y \geq 6$$

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Mặt khác, cũng từ (10) ta suy ra : $\frac{1}{y} < \frac{1}{3} \Rightarrow y > 3$

Như vậy $y \in \{4; 5; 6\}$. Xét ba Trường hợp :

- Trường hợp 1 : $x = 4$, từ phương trình ta được $y = 12$ (thoả mãn).
- Trường hợp 2 : $x = 5$, từ phương trình ta được $y = \frac{2}{15}$ (loại).
- Trường hợp 3 : $x = 6$, từ phương trình ta được $y = 6$.

Tóm lại, phương trình (10) có ba nghiệm nguyên : $(4; 12)$, $(12; 4)$, $(6; 6)$.

Cách 2. Đưa phương trình đã cho về phương trình ước số :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow xy - 3(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(y - 3) = 9.$$

Vế trái phương trình trên là tích của hai số nguyên do x, y là các số nguyên. Từ đó suy ra $x - 3$ và $y - 3$ phải là ước của 3. Vì $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ nên ta có bảng sau :

$x - 3$	1	-1	3
$y - 3$	9	-9	3
x	4	2	6
y	12	-6	6

3. Chỉ ra một hay nhiều nghiệm nguyên

Phương pháp xét từng khoảng giá trị của ẩn còn được thể hiện dưới dạng : chỉ ra một hoặc vài nghiệm của phương trình, rồi chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Ví dụ 10. Tìm các số tự nhiên x , sao cho : $2^x + 3^x = 5^x$ (11)

Giải :

Phương trình (11) viết thành : $\frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$

- Với $x = 0$, ta được : $1 + 1 = 1$, loại.
- Với $x = 1$, ta được : $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, thoả mãn.
- Với $x > 1$, thì $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \frac{2}{5}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}$, suy ra $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, loại.

Vậy nghiệm duy nhất của (11) là $x = 1$.

4. Sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc

Một số bất đẳng thức cần lưu ý :

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG MÔN TOÁN 8 – PHẦN ĐẠI SỐ

- Bất đẳng thức Cô-si : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$, dấu bằng có $\Leftrightarrow a = b$).
- Bất đẳng thức Bunhiacopxki : $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.
- Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối :
 $|x| \geq x$, dấu bằng có $\Leftrightarrow x \geq 0$; $-|x| \leq x$, dấu bằng có $\Leftrightarrow x \leq 0$.
 $-|x| \leq x \leq |x|$
 $|x| + |y| \geq |x + y|$, dấu bằng có $\Leftrightarrow xy \geq 0$.

Ví dụ 11. Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn phương trình :

$$(x^2 + 1)(x^2 + y^2) = 4x^2y \quad (12)$$

Giải :

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$x^2 + 1 \geq 2x, \text{ dấu bằng có } \Leftrightarrow x = 1.$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ dấu bằng có } \Leftrightarrow x = y.$$

Vì x, y nguyên dương nên nhân các bất đẳng thức trên về theo về ta được :

$$(x^2 + 1)(x^2 + y^2) \geq 4x^2y, \text{ dấu bằng có khi và chỉ khi } x = y = 1.$$

Vậy phương trình (12) có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

Cách 2. $(12) \Leftrightarrow x^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2 - 4x^2y = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y)^2 + (xy - x)^2 = 0.$

Phương trình trên chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ (vì } x, y \text{ nguyên dương).}$$

BÀI TẬP

7. Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $x^2 + xy + y^2 = 2x + y$;

b) $x^2 + xy + y^2 = x + y$;

c) $x^2 - 3xy + 3y^2 = 3y$;

d) $x^2 - 2xy + 5y^2 = y + 1$;

8. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

9. Tìm các số tự nhiên x, y thoả mãn : $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2}$

(Trích đề thi HSG lớp 8, huyện Thái Thụy 2007 – 2008)

10. Tìm các số tự nhiên x thoả mãn :

a) $2^x + 3^x = 35$;

b) $3^x + 4^x = 5^x$;

c) $5^x + 12^x = 17^x$.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

11. a) Tìm ba số nguyên dương sao cho tích của chúng gấp đôi tổng của chúng.
 b) Tìm bốn số nguyên dương sao cho tổng của chúng bằng tích của chúng.
12. Tìm các số nguyên x và y sao cho : $x^3 + x^2 + x + 1 = y^3$.
13. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình : $x! + y! = (x + y)!$
14. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương :

$$x^{17} + y^{17} = 19^{17}$$

IV. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

1. Sử dụng tính chất về chia hết của số chính phương

Các tính chất thường dùng :

- Số chính phương không tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- Số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì chia hết cho p^2 .
- Số chính phương khi chia cho 3, cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.
- Số chính phương chia cho 5, cho 8 thì số dư chỉ có thể là 0, 1 hoặc 4.
- Số chính phương lẻ chia cho 4, 8 thì số dư đều là 1.
- Lập phương của một số nguyên chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1 hoặc 8.

Ví dụ 12. Tìm các số nguyên x để $9x + 5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

Giải :

Đặt $x(9x + 5) = y(y + 1)$ với y nguyên thì :

$$36x + 20 = 4y^2 + 4y \Leftrightarrow 3(12x + 7) = (2y + 1)^2 \quad (13)$$

Ta thấy vế trái (13) chia hết cho 3 nên vế phải cũng chia hết cho 3.

Số chính phương $(2y + 1)^2$ chia hết cho 3, nên cũng chia hết cho 9.

Mà $12x + 7$ không chia hết cho 3 nên $3(12x + 7)$ không chia hết cho 9.

Mâu thuẫn ở trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x thỏa mãn điều kiện đề bài.

2. Sử dụng tính chất kẹp

Cần chú ý đến tính chất : giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào. Từ đó suy ra với mọi số nguyên a, x ta có :

- Không tồn tại x để $a^2 < x^2 < (a + 1)^2$.
- Nếu $a^2 < x^2 < (a + 2)^2$ thì $x^2 = (a + 1)^2$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG MÔN TOÁN 8 – PHẦN ĐẠI SỐ

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi số nguyên k cho trước, không tồn tại số nguyên dương x sao cho : $x(x + 1) = k(k + 2)$.

Giải :

Giả sử : $x(x + 1) = k(k + 2)$ với k nguyên, x nguyên dương.

Ta viết phương trình trên thành : $x^2 + x + 1 = (k + 1)^2$.

Do $x > 0$ nên $x^2 < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1$ hay $x^2 < (k + 1)^2 < (x + 1)^2$ (14)

Ta thấy x^2 và $(x + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên (14) không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại số nguyên dương x thoả mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ 14. Tìm các số nguyên x để biểu thức $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$ là một số chính phương.

Giải :

Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ (18), với y là số tự nhiên.

Ta có : $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$.

Ta sẽ chứng minh $a^2 < y^2 < (a + 2)^2$ với $a = x^2 + x$.

Thật vậy : $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} > 0$, suy ra $y^2 > a^2$.

$$\begin{aligned}(a + 2)^2 - y^2 &= (x^2 + x + 2)^2 - [(x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)] \\ &= [(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) + 4] - [(x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)] \\ &= 3x^2 + 3x + 1 = 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} > 0, \text{ suy ra } y^2 < (a + 2)^2.\end{aligned}$$

Do $a^2 < y^2 < (a + 2)^2$ nên $y^2 = (a + 1)^2$, hay $(x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 3 = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2.$$

Với $x = 1$ hoặc $x = -2$, biểu thức đã cho bằng $9 = 3^2$, thoả mãn.

Vậy các giá trị nguyên của x cần tìm là $x \in \{-2 ; 1\}$

BÀI TẬP

15. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $3x^2 + 4y^2 = 6x + 13$.

16. Có tồn tại hay không hai số nguyên dương x và y sao cho $x^2 + y$ và $y^2 + x$ đều là số chính phương.

17. Chứng minh rằng có vô số số nguyên x và y để biểu thức sau là số chính phương :
 $(1 + 2 + 3 + \dots + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2)$.

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

18. Chứng minh rằng không có số chính phương nào viết được dưới dạng $2^p + 3^p$ trong đó p là số nguyên tố.

19. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

20. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$.

21. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

22. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^4 - 2y^2 = 1$.

V. PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN. NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

1. Phương pháp lùi vô hạn

Ví dụ 15. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn đẳng thức : $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ (15)

Giải :

Từ (15) suy ra $x \div 2$. Đặt $x = 2x_1$ với x_1 nguyên. Thay vào (15) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$4x_1^3 + y^3 = 2z^3 \quad (15.1)$$

Từ (15.1) suy ra $y \div 2$. Đặt $y = 2y_1$ với y_1 nguyên. Thay vào (15.1) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$2x_1^3 + 4y_1^3 = z^3 \quad (15.2)$$

Từ (15.2) suy ra $z \div 2$. Đặt $z = 2z_1$ với z_1 nguyên. Thay vào (15.2) rồi chia hai vế cho 2 ta được:

$$x_1^3 + 2y_1^3 = z_1^3 \quad (15.3)$$

Như vậy nếu $(x ; y ; z)$ là nghiệm của (15) thì $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ cũng là nghiệm của (15) trong đó $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$.

Lập luận tương tự như trên thì $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ cũng là nghiệm của (15) trong đó $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đi đến : x, y, z chia hết cho 2^k với k là số tự nhiên tùy ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Đó là nghiệm nguyên duy nhất của (19).

2. Nguyên tắc cực hạn

Ví dụ 16. Chứng minh rằng phương trình (19) không còn nghiệm nào khác nghiệm $x = y = z = 0$.

Giải :

Giả sử ngoài nghiệm $x = y = z = 0$, (19) còn có nghiệm $(x ; y ; z) \neq (0 ; 0 ; 0)$. Trong các nghiệm như vậy, chọn ra được nghiệm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có tổng $|x_0| + |y_0| + |z_0|$ nhỏ nhất.

Vì $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ là nghiệm của (19) nên : $x_0^3 + 2y_0^3 = 4z_0^3$. Suy ra $x_0 : 2$.

Đặt $x_0 = 2x_1$, ta được : $8x_1^3 + 2y_0^3 = 4z_0^3 \Leftrightarrow 4x_1^3 + y_0^3 = 2z_0^3$. Suy ra $y_0 : 2$.

Đặt $y_0 = 2y_1$, ta được : $4x_1^3 + 8y_1^3 = 2z_0^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 + 4y_1^3 = z_0^3$. Suy ra $z_0 : 2$.

Đặt $z_0 = 2z_1$, ta được $2x_0^3 + 4y_0^3 = 8z_0^3 \Leftrightarrow x_0^3 + 2y_0^3 = 4z_0^3$.

Do đó $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ cũng là nghiệm của phương trình (18).

Hơn nữa, do cách chọn nên $(x_1 ; y_1 ; z_1) \neq (0 ; 0 ; 0)$, $(x_0 ; y_0 ; z_0) \neq (0 ; 0 ; 0)$

$$|x_1| + |y_1| + |z_1| = \left| \frac{x_0}{2} \right| + \left| \frac{y_0}{2} \right| + \left| \frac{z_0}{2} \right| < |x_0| + |y_0| + |z_0|.$$

Điều này trái với cách chọn $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

Vậy, ngoài nghiệm $x = y = z = 0$ ra phương trình (19) không còn nghiệm nguyên nào khác.

BÀI TẬP

23. Tìm các nghiệm nguyên của các phương trình sau :

a) $x^3 - 3y^3 = 9z^3$;

b) $x^2 + y^2 = 3z^2$;

c) $x^2 + y^2 = 6(z^2 + t^2)$;

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$;

24. a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình : $x^2 + y^2 = 7z^2$.

b) Chứng minh rằng số 7 không viết được dưới dạng tổng các bình phương của hai số hữu tỉ.