

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Cho các số a, b thỏa mãn $2a^2 + 11ab - 3b^2 = 0, b \neq 2a, b \neq -2a$. Tính giá trị biểu thức

$$T = \frac{a-2b}{2a-b} + \frac{2a-3b}{2a+b}.$$

b) Cho các số nguyên dương x, y, z và biểu thức

$$P = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) + 2xyz}.$$

Chứng minh rằng P là số nguyên chia hết cho 6.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2x^3 + 2x^2y + x^2 + 2xy = x + 10$.

b) Cho 19 điểm phân biệt nằm trong một tam giác đều có cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 19 điểm đã cho mà có diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + 6 = 0 \\ x^2 + 3x + y = 1. \end{cases}$$

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE, ACFG$ và hình bình hành $AEKG$.

a) Chứng minh rằng $AK = BC$ và $AK \perp BC$.

b) DC cắt BF tại M . Chứng minh rằng A, K, M thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng khi A thay đổi trên cung lớn BC của $(O; R)$ thì K luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{\sqrt{(2x+y)^3 + 1} - 1} + \frac{2}{\sqrt{(x+2y)^3 + 1} - 1} + \frac{(2x+y)(x+2y)}{4} - \frac{8}{3(x+y)}.$$

.....HẾT.....