

Một số tính chất của hai đường đẳng giác hai điểm liên hợp đẳng giác và ứng dụng

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Trong các đề thi HSG khái niệm đường đẳng giác không còn lạ lẫm xong sử dụng thành thục nó trong các bài toán như một công cụ thì khá khó và mất nhiều thời gian. Ở đây tôi xin nêu một số tính chất cơ bản cũng như nêu một số bài toán hay về chủ đề này.

I) Một số định nghĩa và tính chất cơ bản:

Định nghĩa hai đường đẳng giác: Cho tam giác ABC , hai đường Ax, Ay gọi là đẳng giác trong góc $\angle BAC$ nếu chúng đối xứng nhau qua phân giác góc $\angle BAC$.

Từ định nghĩa ta có thể suy ra một số tính chất như sau:

Tính chất 1: Cho tam giác ABC và hai đường Ax, Ay đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Khi đó $\angle xAB = \angle yAC$.

Tính chất 2: Cho góc $\angle xOy$, hai đường OA, OB đẳng giác trong góc $\angle xOy$. Kẻ $BH \perp Ox (H \in Ox)$, $BK \perp Oy (K \in Oy)$. Chứng minh rằng: $HK \perp OA$.

Tính chất 3: Cho góc $\angle xOy$, hai đường OA, OB đẳng giác trong góc $\angle xOy$. Kẻ $BH \perp Ox (H \in Ox)$, $BK \perp Oy (K \in Oy)$. Qua A kẻ AE, AF lần lượt vuông góc Ox, Oy tại các điểm E, F . Khi đó E, H, F, K đồng viên (chú ý chiều đảo cũng đúng).

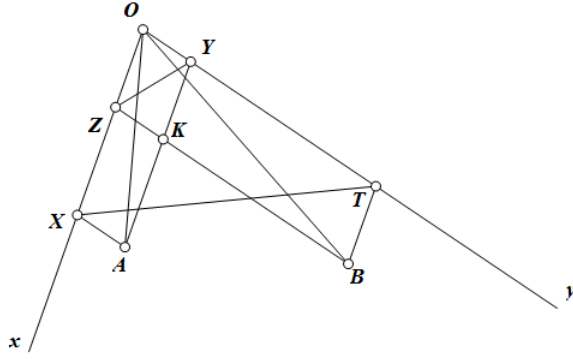
Tính chất 4: Cho góc $\angle xOy$ và 2 điểm A, B nằm trong miền góc $\angle xOy$. Qua A kẻ $AX \parallel Oy (X \in Ox)$, $AY \parallel Ox (Y \in Oy)$, $BZ \parallel Oy (Z \in Ox)$, $BT \parallel Ox (T \in Oy)$. Khi đó X, Y, Z, T đồng viên $\Leftrightarrow OA, OB$ đẳng giác trong góc $\angle xOy$.

Tính chất 5: Cho tam giác ABC có 2 đường đẳng giác $AE, AF (E, F \in BC)$. Chứng minh rằng: $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Tính chất 6: Cho tam giác ABC có 2 đường đẳng giác $AE, AF (E, F \in BC)$. Chứng minh rằng: (AEF) tiếp xúc (ABC) .

Chứng minh: Ở đây xin chứng minh các tính chất 4,5,6. Các tính chất 1,2,3 khá đơn giản chỉ cần định nghĩa và các phép biến đổi góc cơ bản xin nhường lại cho bạn đọc.

Tính chất 4:



Gọi $ZB \cap AY = K$. Ta nhận thấy được: $ZKAX, OZKY, YTBK$ đều là các hình bình hành do đó: $\angle XAY = \angle KYT = \angle ZBT$.

Vậy mà: $\angle xOB = \angle OZB$ và $\angle yOA = \angle OAY$ do đó $\angle OAX = \angle OBT$. Vậy là $\triangle OAX \sim \triangle OBT$. Do đó $\frac{OX}{OT} = \frac{AX}{BT}$ hay là $OZ.OX = OY.OT$ (đpcm). Điều ngược lại hiển nhiên đúng.

Tính chất 5 (Bạn đọc tự vẽ hình):

Gọi L, H lần lượt là hình chiếu của E, F lên AB , K, M là hình chiếu của E, F lên AC . Ta thấy rằng: $VT = \frac{S_{ABE}}{S_{ACE}} \cdot \frac{S_{ABF}}{S_{ACF}} = \frac{EH.AB}{EK.AC} \cdot \frac{FL.AB}{EM.AC}$. Do đó đpcm $\Leftrightarrow \frac{EH}{EK} = \frac{FM}{FL}$ (đúng do ta thấy hai tam giác đồng dạng tương ứng).

Tính chất 6 (Bạn đọc tự vẽ hình): Qua A kẻ tiếp tuyến Ax với (ABC) . Ta có: $\angle xAB + \angle BAE = \angle C + \angle FAC = \angle AFE$ do đó Ax cũng tiếp xúc (AEF) do đó (ABC) tiếp xúc (AEF) .

Nhận xét: Các tính chất 3,4,5,6 là cực kì quan trọng và có nhiều ứng dụng trong làm bài tập.

Tiếp tục tôi sẽ đề cập tới khái niệm 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác.

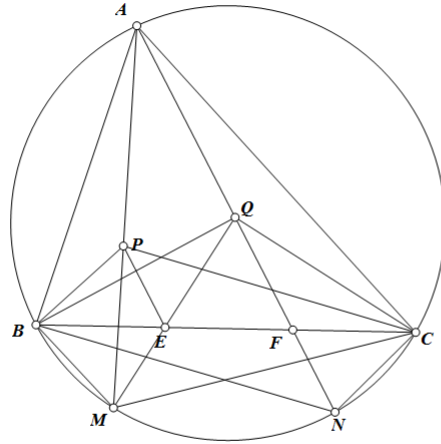
Định nghĩa hai điểm liên hợp đẳng giác: Hai điểm được gọi là **liên hợp đẳng giác** nếu chúng **đẳng giác** với nhau trong(ngoài) hai góc bất kì của tam giác.

Tính chất 7: Cho P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC . Khi đó chân các đường vuông góc hạ xuống từ P, Q nằm trên cùng 1 đường tròn(**Đường tròn Pedal**).

Chứng minh: Áp dụng *tính chất số 3* ba lần ta có đpcm.

Tính chất 8: Cho tam giác ABC và 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC . Gọi $AP \cap (O) = M$, $AQ \cap (O) = N$, gọi $MQ \cap BC = E$. Chứng minh rằng: $PE \parallel AQ$.

Chứng minh:



Gọi AQ cắt lại (O) tại N và cắt BC tại F . Ta lại có P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC do đó: $\angle PCM = \angle PCB + \angle BCM = \angle QCA + \angle QAC = \angle CQN$ mà $\angle PMC = \angle QNC$ nên ta có: $\triangle PMC \sim \triangle CNQ(g.g)$ do đó $\frac{PM}{CN} = \frac{CM}{NQ}$.

Hoàn toàn tương tự thì: $\frac{MA}{NC} = \frac{MC}{NF}$. Do đó với chú ý rằng $MN \parallel EF$ thì ta có: $\frac{PM}{MA} = \frac{CM}{NQ} : \frac{MC}{NF} = \frac{NF}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ do đó ta có $PE \parallel AQ$ (đpcm).

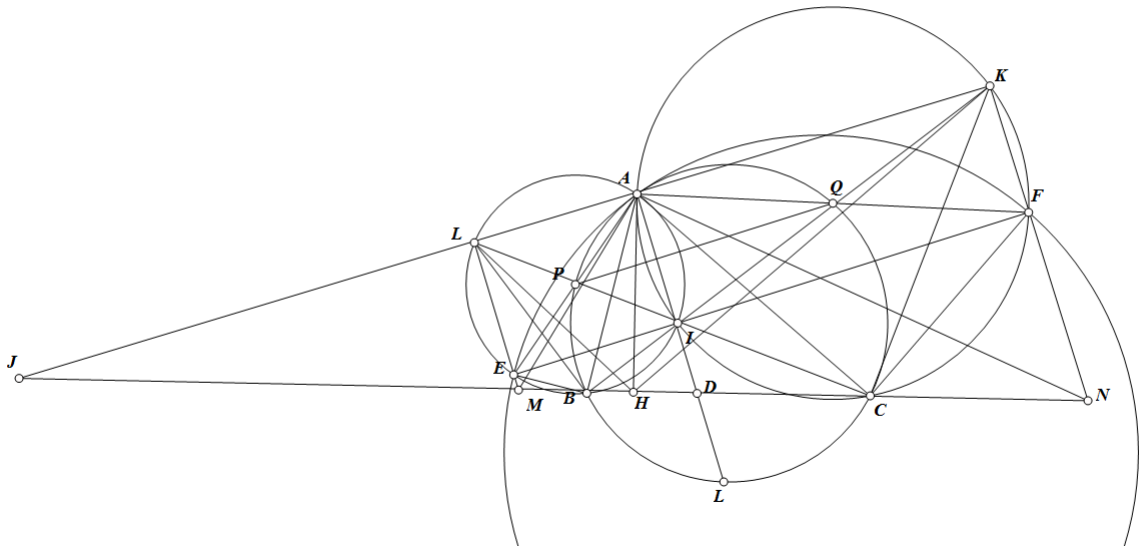
Nhận xét: Đây là 1 tính chất hay cũng như có nhiều ứng dụng và chứng minh trên

là của **Phan Anh Quân** trên diễn đàn Aops.

II) Một số bài toán ứng dụng

Để cụ thể hoá các lý thuyết trên chúng ta sẽ cùng quan sát một số lời giải các bài tập từ đó tôi hi vọng các bạn sẽ làm chủ được những kiến thức mới.

Bài toán 1(Nguyễn Xuân Hùng-THTT số 471): Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp. Một đường thẳng d qua I vuông góc AI . Lấy các điểm E, F thuộc d sao cho $\angle EBA = \angle FCA = 90^\circ$. Các điểm M, N nằm trên BC sao cho $ME \parallel NF \parallel AI$. Chứng minh rằng: (ABC) tiếp xúc (AMN) .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Trước tiên xin nhắc lại bổ đề quen thuộc không chứng minh: "Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có X, Y lần lượt thuộc BC sao cho AX, AY đẳng giác. Khi đó tam giác (AXY) tiếp xúc (ABC) ."

Quay trở lại bài toán:

Trường hợp 1 ($AB = AC$). Khi đó ta có: $\triangle IAB = \triangle IAC$ do đó đồng thời thấy rằng: $EFMN$ là 1 hình chữ nhật từ đó hiển nhiên ta có: AM, AN đẳng giác trong tam giác ABC bằng biến đổi góc đơn giản. Do đó theo bổ đề ta có đpcm.

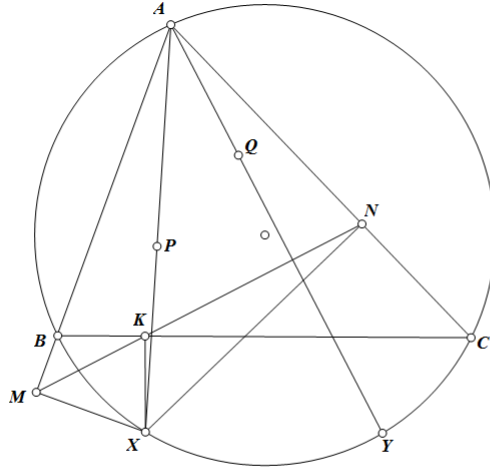
Trường hợp 2 ($AB \neq AC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cung AB và AC lần lượt không chứa C, B của (O) . Từ giả thiết ta có ngay rằng: A, B, E, I đồng viên nên ta có: P là tâm $(AEBI)$ (do ta có kết quả quen thuộc P là tâm (AIB))(*). Hoàn toàn tương tự thì Q cũng là tâm $(AICF)$ (**). Gọi BI, CI lần lượt cắt lại (AIC) và

(AIB) tại các điểm K, L khác I . Từ $(*)(**)$ ta thu được các hình chữ nhật là $AIEL$ và $AIFK$. Lại có: $ME \parallel NF \parallel AI$ nên thu được: L, E, M thẳng hàng và K, F, N cũng thẳng hàng. Ta chú ý do $AB \neq AC$ nên LK không song song BC .

Hiển nhiên từ 2 hình chữ nhật trên ta thấy rằng: $\angle LAI = \angle KAI = 90^\circ$ do đó $\overline{LAK} \perp AI$. Gọi AD là đường phân giác trong góc BAC , gọi LK cắt BC tại điểm J mà $\overline{LAK} \perp AI$ nên AJ là phân giác ngoài góc BAC .

Ta thấy rằng: AD, BK, CL đồng quy tại I . Do đó áp dụng tính chất về hàng điểm điều hoà thì $(JALK) = (JDBC) = -1$. Kẻ AH vuông góc BC tại điểm H . Ta thấy rằng: $H(JALK) = -1$ mà $HA \perp HJ$ do đó HA là phân giác góc LHK . Vậy mà lại có: A, L, M, K đồng viên và A, H, N, K đồng viên (lần lượt thuộc đường tròn đường kính AM và AN) nên ta có: $(ML, MA) \equiv (HL, HA) \equiv (HK, HA) \equiv (NK, NA) \pmod{\pi}$ do đó chú ý $ME \parallel NF \parallel AI$ thế thì AI cũng là phân giác góc MAN hay là AM, AN đẳng giác trong tam giác ABC . Áp dụng bổ đề ta có (AMN) tiếp xúc (ABC) (đpcm).

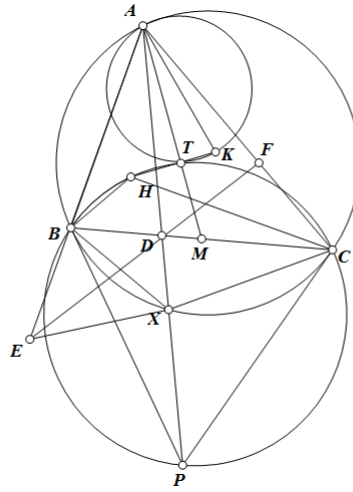
Bài toán 2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có AP, AQ đẳng giác trong tam giác, AP cắt lại (O) tại điểm thứ hai X . Chứng minh rằng đường thẳng *Simsons* ứng với X của tam giác ABC vuông góc AQ .



Lời giải: Gọi M, N, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ X xuống AB, CA, BC . Ta không chứng minh lại kết quả cơ bản của đường thẳng *Simsons*. Do tứ giác

$MXNA$ nội tiếp suy ra $\angle ANM = \angle AXM$, gọi $AQ \cap MN = S$ do đó chú ý AP, AQ đẳng giác thì $\triangle AMX \sim \triangle ASN$ do đó $\angle ASN = 90^\circ$ vậy $AQ \perp MN$ (đpcm).

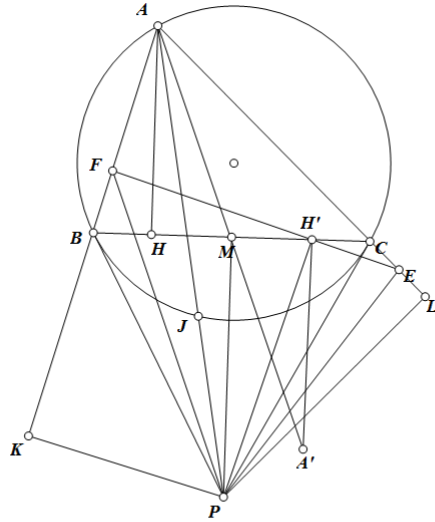
Bài toán 3(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC có AD là đường đối trung của tam giác ABC . Lấy E, F trên AB, AC sao cho $DE = DF$. K là trực tâm tam giác AEF . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng (AK) tiếp xúc (O) và (BHC) .



Lời giải: Để chứng minh (AK) tiếp xúc (O) không khó ta chỉ cần chứng minh AK và AH đẳng giác là ổn. Gọi M là trung điểm BC thì ta có: AD là trung tuyến tam giác AEF lại là đối trung tam giác ABC nên ta có: $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ (c.g.c) do đó ta thấy ngay là: AH, AK đẳng giác (chúng là trực tâm của 2 tam giác đồng dạng trung đỉnh). Gọi T là hình chiếu của H lên AM . Khi H, T, K thẳng hàng khi đó dĩ nhiên (AK) tiếp xúc (O) (tính chất vị tự). HK chính là đường thẳng *Steiner* của tứ giác toàn phần $AEDFBC$ do đó KH song song với đường thẳng *Steiner* ứng với điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần này, đó chính là điểm X là giao AD và (O) . Ta thấy rằng: $\angle BXD = \angle C = \angle AEF$ (chứng minh trên) do đó tứ giác $BDXE$ nội tiếp hiển nhiên khi đó X là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $AEDFBC$. Vậy ta quy bài toán về bài toán số 2 và thấy ngay điều phải chứng minh.

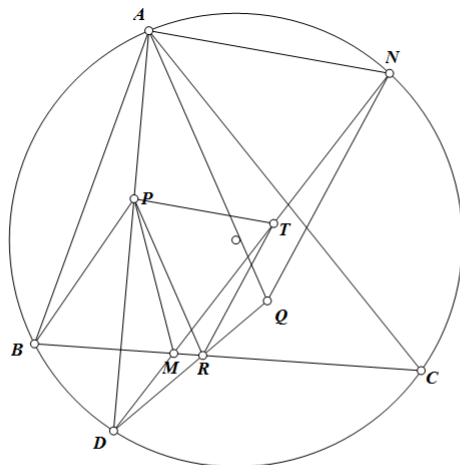
Nhận xét: Bài toán trên đề cập tới một mảng khá thú vị trong các trường hợp đặc biệt của hai đường đẳng giác đó là đường trung tuyến và đường đối trung.

Bài toán 4(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH . Gọi M là trung điểm BC , H' đối xứng H qua M . Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau ở P . Đường thẳng qua H' vuông góc $H'P$ cắt AB, AC tại F, E . Chứng minh rằng: $\angle FPB = \angle CPE$.



Lời giải: Gọi A' đối xứng A qua M . Dĩ nhiên ta thấy $A'H'$ vuông góc BC tại H' . Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, AC . Ta để ý rằng: PB đối song mà $A'B \parallel AC$ nên BP, BA' đẳng giác. Do đó P, A' liên hợp đẳng giác. Do đó theo tính chất về đường tròn *pedal* thì K, M, H', L đồng viên. Ta quy bài toán về biến đổi góc định hướng. Ta có: $(BP, FP) \equiv (KP, FP) - (KP, BP) \equiv (FH', KH') - (MK, BM) \equiv (FH', KH') - (H'L, KL) \equiv (CP, PL) - (EP, EL) \equiv (CP, EP) \pmod{\pi}$ do đó ta có đpcm.

Bài toán 5(Phan Anh Quân): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC . $AP \cap (O) = A, D$. M là 1 điểm thuộc cạnh BC . $DM \cap (O) = N, D$. Chứng minh rằng: $\angle PMB = \angle ANQ$.



Lời giải(Phan Anh Quân): Gọi $DQ \cap BC = R$. Ta có: $PR \parallel AQ$. Lấy $T \in DN$ sao cho $PT \parallel AN$. Theo định lý *Thales* thì $\frac{DR}{DQ} = \frac{DP}{DQ} = \frac{DT}{DN}$ do đó $RT \parallel QN$. Vậy $\triangle AQN \sim \triangle PRT$. Do đó $\angle BMD = \angle MCD + \angle MDC = \angle BAD + \angle CAN = \angle QAC + \angle CAN = \angle QAN = \angle RPT$ do đó $PTMR$ nội tiếp suy ra $\angle PMB = \angle PTR = \angle ANQ$ (đpcm).

Như vậy là ở trên đây tôi đã giới thiệu một số bài toán ứng dụng các kiến thức về đường đẳng giác và hai điểm liên hợp đẳng giác. Cuối cùng để kết thúc bài viết xin đề nghị hai bài toán khó để các bạn luyện tập.

Bài toán 6(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . P là 1 điểm bất kì trên phân giác góc A của tam giác ABC . CP, BP cắt $(ABP), (ACP)$ lần lượt tại các điểm $R, S \neq P$. E, F là các điểm chính giữa cung AC, AB của (O) tương ứng không chứa B, C . AE, AF lần lượt cắt lại $(APC), (APB)$ tại các điểm $Z, Y \neq A$. ZR, SY cắt BC tại các điểm M, N . Chứng minh rằng (AMN) tiếp xúc (O) .

Bài toán 7(CeuAzul)(Aops): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . AP là phân giác(P nằm trong tam giác ABC). Gọi BP, CP cắt CA, AB và (O) lần lượt tại E, U, F, V . FF cắt (O) tại 2 điểm S, T . Chứng minh rằng (PST) tiếp xúc (PUV) .