

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN ÁNH NGỌC

**PHƯƠNG PHÁP CHUẨN HOÁ
VÀ PHƯƠNG PHÁP THUẦN NHẤT
TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp
Mã số : 60.46.40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng — Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học: TS. Cao Văn Núi

Phản biện 1: PGS.TSKH Trần Quốc Chiến

Phản biện 2: GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ Khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 29 tháng 5 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin — Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học sư phạm, Đại học Đà Nẵng

Mở đầu

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học phổ thông thì bất đẳng thức là một nội dung khó cho cả người dạy lẫn người học. Mặc khác một phần lớn các bất đẳng thức là thuần nhất nên việc nghiên cứu các phương pháp chứng minh bất đẳng thức thuần nhất và phương pháp biến một bất đẳng thức không thuần nhất, có điều kiện về dạng thuần nhất và sau đó chứng minh nó là nghiên cứu, giải quyết một lớp rộng các bài toán bất đẳng thức. Với mong muốn sử dụng nguồn kiến thức cơ sở và sơ cấp để giải quyết được lớp bài toán bất đẳng thức phục vụ thiết thực cho việc dạy và học chương trình phổ thông, bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi chọn đề tài "Phương pháp chuẩn hoá và phương pháp thuần nhất trong chứng minh bất đẳng thức".

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Mục đích của đề tài này là trình bày có hệ thống từ cơ sở lý thuyết về hàm số thuần nhất đến bất đẳng thức thuần nhất. Sau đó trình bày một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức thuần nhất; phương pháp chuyển một bất đẳng thức không thuần nhất, có điều kiện về dạng thuần nhất và chứng minh nó. Ngoài ra vận dụng lý thuyết để sáng tạo một số bất đẳng thức mới.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Đối tượng nghiên cứu

Nghiên cứu các bất đẳng thức thuần nhất, bất đẳng thức thuần nhất đối xứng, bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz bất đẳng thức Schur, bất đẳng thức Muirhead và các ứng dụng của chúng.

Phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu lớp bài toán bất đẳng thức đại số trong chương trình toán phổ thông, trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phương pháp nghiên cứu tư liệu, phương pháp thực nghiệm ở trường phổ thông và phương pháp thảo luận trao đổi qua bạn bè, đồng nghiệp.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN

Tạo được một tài liệu về bất đẳng thức để tham khảo khi nghiên cứu, giảng dạy

và bồi dưỡng học sinh giỏi.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm có 3 chương:

Chương 1. Kiến thức cơ bản

Chương 2. Bất đẳng thức thuần nhất

Chương 3. Phương pháp chuẩn hoá và phương pháp thuần nhất trong chứng minh bất đẳng thức

Chương 1

Kiến thức cơ bản

1 Hàm số thuần nhất

Định nghĩa 1.1. Hàm số thực $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ xác định trên miền D được gọi là hàm số thuần nhất nếu với mọi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, với mọi số thực t sao cho $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \in D$ thì tồn tại số thực m sao cho:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Khi đó ta nói hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là hàm số thuần nhất bậc m .

2 Đa thức đối xứng

Định nghĩa 1.2. Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ xác định trên D được gọi là hàm số đối xứng trên D nếu :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D & \text{thì} & (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in D \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$$

trong đó σ là hoán vị bất kỳ của $\{1, 2, \dots, n\}$

Định nghĩa 1.3. Đa thức $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là đa thức đối xứng nếu nó là hàm số đối xứng.

2.1 Biểu diễn đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ bản

Định lý 1.1. Với mỗi bộ số $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ thoả mãn $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ đều có hữu hạn bộ số $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{N}^3$ sao cho:

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \text{ và } n_1 \geq t_1, n_1 + n_2 \geq t_1 + t_2, n_1 + n_2 + n_3 = t_1 + t_2 + t_3.$$

(Khi đó ta nói bộ số (n_1, n_2, n_3) trội hơn bộ số (t_1, t_2, t_3) và ký hiệu: $(n_1, n_2, n_3) \succ (t_1, t_2, t_3)$.)

Định lý 1.2. Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác đa thức không, thế thì có một và chỉ một đa thức $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các đa thức đối xứng cơ bản.

2.2 Phương pháp biểu diễn đa thức đối xứng thuần nhất 3 biến qua các đa thức đối xứng cơ bản

Xét đa thức đối xứng thuần nhất ba biến $P(x_1, x_2, x_3)$, có hạng tử cao nhất là: $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$

Đặt $p = x_1 + x_2 + x_3, q = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3, r = x_1 x_2 x_3$. Khi đó ta tìm tất cả các bộ số (t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}) thoả mãn:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \succ (t_{11} t_{12}, t_{13}) \succ (t_{21} t_{22}, t_{23}) \succ \dots \succ (t_{m1} t_{m2}, t_{m3})$$

sau đó ta biểu diễn:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \lambda_0 p^{\alpha_1 - \alpha_2} q^{\alpha_2 - \alpha_3} r^{\alpha_3} + \sum_{i=1}^m \lambda_i p^{t_{i1} - t_{i2}} q^{t_{i2} - t_{i3}} r^{t_{i3}}$$

Cuối cùng dùng phương pháp đồng nhất thức (tức là cho bộ số (x_1, x_2, x_3) nhận $m+1$ giá trị khác nhau) ta tìm được tất cả các hệ số $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, m$ và suy ra được biểu diễn của $P(x_1, x_2, x_3)$.

3 Bất đẳng thức Schur

3.1 Định lý Schur

Với mọi số thực không âm x, y, z , với mọi số thực dương r ta có:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z$ hoặc $x = y$ và $z = 0$ và các hoán vị của chúng.

3.2 Hệ quả

Nếu x, y, z là các số thực dương thì bất đẳng thức đúng với mọi số thực r và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Định nghĩa 1.4 (Tổng hoán vị vòng tròn và tổng đối xứng). :

Cho hàm số $f(x, y, z)$ của ba biến số thực x, y, z , khi đó:

i> Ta gọi tổng hoán vị vòng tròn các biến của hàm số $f(x, y, z)$ ký hiệu và xác định là:

$$\sum_{cyclic} f(x, y, z) = f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)$$

ii> Ta gọi tổng đối xứng các biến của hàm số $f(x, y, z)$ ký hiệu và xác định là:

$$\sum_{sym} f(x, y, z) = f(x, y, z) + f(x, z, y) + f(y, x, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) + f(z, y, x)$$

3.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng

Bộ số thực (x, y, z) được gọi là bộ số đơn điệu nếu ta có: $x \geq y \geq z$ hoặc $z \geq y \geq x$.

Định lý 1.3. Với mọi số thực không âm: a, b, c, x, y, z sao cho các bộ số $(a, b, c), (x, y, z)$ là các bộ số đơn điệu thì ta luôn có $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $(a = b = c)$ hoặc $(a = b \text{ và } z = 0)$ hoặc $(b = c \text{ và } x = 0)$

4 Định lý Muirhead

4.1 Khái niệm làm trội

Cho hai bộ số thực: $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), a' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, ta nói rằng bộ số a' bị làm trội bởi bộ số a hay bộ số a trội hơn bộ số a' nếu:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n; a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k, 1 \leq k < n, \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n. \end{cases}$$

Khi đó ta ký hiệu: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ hoặc $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \prec (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

4.2 Định nghĩa phép biến đổi T

Cho bộ số thực $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, giả sử α_k và α_l là hai số khác nhau trong α và $\alpha_k > \alpha_l$. Đặt: $p = \frac{\alpha_k + \alpha_l}{2}, t = \frac{\alpha_k - \alpha_l}{2}$, ta có:

$$t > 0, \alpha_k = p + t, \alpha_l = p - t.$$

Khi đó với mỗi số thực q cố định thoả mãn: $0 \leq q < t$ ta xác định phép biến đổi T như sau:

$$T(\alpha) = \alpha' \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'_k = p + q \\ \alpha'_l = p - q \\ \alpha'_i = \alpha_i, i \neq k, i \neq l \end{cases}$$

Nếu $\alpha' = T(\alpha)$ thì ta nói α' thu được từ α nhờ phép biến đổi T hay T biến đổi α thành α' .

Bây giờ cho bộ số dương $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ký hiệu: $\sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ là tổng đối xứng của các biểu thức dạng: $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ta có các bổ đề sau:

Bổ đề 1.1. Nếu $\alpha' = T(\alpha)$ thì $\sum_{sym} x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \cdots x_n^{\alpha'_n} \leq \sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Bổ đề 1.2. Nếu $\alpha' \prec \alpha$ nhưng α' không đồng nhất với α thì tồn tại α^* sao cho $\alpha' \prec \alpha^*$ và α^* thu được từ α nhờ thực hiện liên tiếp một số hữu hạn các phép biến đổi T.

Bổ đề 1.3. Nếu $\alpha' \prec \alpha$ thì α' có thể thu được từ α nhờ áp dụng liên tiếp hữu hạn lần các phép biến đổi T.

4.3 Định lý Muirhead tổng quát

Cho n số dương $x_1, x_2, \cdots, x_n$, cho hai bộ số không âm $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ và $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_n)$ thoả điều kiện:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0; \alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \cdots \geq \alpha'_n \geq 0.$$

Khi đó điều kiện cần và đủ để

$$\sum_{sym} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \geq \sum_{sym} x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \cdots x_n^{\alpha'_n} \quad \text{là} \quad \alpha \succ \alpha'.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\alpha_i = \alpha'_i \quad i = \overline{1, n}$ hoặc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4.4 Định lý Muirhead cho 3 số

Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ thoả:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0; b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0; \\ a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases}$$

Cho x, y, z là các số thực dương, khi đó $\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_i = b_i \quad i = 1, 2, 3$ hoặc $x = y = z$.

Để chứng minh định lý trong trường hợp này ta cần đến một bổ đề sau:

Bổ đề 1.4. Cho các số thực không âm a_1, a_2, b_1, b_2 thoả: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ và $\max\{a_1; a_2\} \geq \max\{b_1; b_2\}$. Khi đó với các số thực dương x, y ta có :

$$x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1} \geq x^{b_1} y^{b_2} + x^{b_2} y^{b_1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = b_1$ và $a_2 = b_2$ hoặc $x = y$.

5 Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức AM - GM)

Định lý 1.4. Với n số thực không âm bất kỳ: $a_1, a_2, \dots, a_n$, ($1 < n \in \mathbb{N}$), đặt

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad GM = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Ta luôn có: $AM \geq GM$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

6 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Định lý 1.5. Với 2 bộ n số thực bất kỳ $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta luôn có:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Chương 2

Bất đẳng thức thuần nhất

1 Bất đẳng thức thuần nhất

Định nghĩa 2.1. Bất đẳng thức dạng $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ trong đó $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hàm số thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất. Khi đó các bất đẳng thức: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ cũng được gọi là các bất đẳng thức thuần nhất.

2 Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức thuần nhất

2.1 Phương pháp dồn biến

Để chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ trước hết ta chứng minh $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(t, t, x_3, \dots, x_n)$, trong đó: $t = \frac{x_1+x_2}{2}$ hoặc $t = \sqrt{x_1x_2}$.

Để chứng minh $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(t, t, x_3, \dots, x_n)$ ta thường chứng minh:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(t, t, x_3, \dots, x_n) \geq 0$$

Cuối cùng để kết thúc việc chứng minh ta chỉ cần chứng minh $f(t, t, x_3, \dots, x_n) \geq 0$ đây là bất đẳng thức có số biến ít hơn bất đẳng thức ban đầu.

Trong quá trình chứng minh ta có thể dùng thêm một số biện pháp như sau:

i> Nếu bất đẳng thức đối xứng với các biến thì ta có thể giả sử:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad \text{hoặc} \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n.$$

ii> Nếu bất đẳng thức có dạng hoán vị vòng quanh thì ta có thể giả sử:

$$x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{hoặc} \quad x_1 = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Hiển nhiên các thủ thuật đó không làm giảm tính tổng quát của bài toán ban đầu.

Minh hoạ phương pháp:

Bài toán 2.1. (*Czech- Slovakia 1999*)

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum_{cyclic} a(a+2b)(2a+c) - (a+2b)(b+2c)(c+2a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)+3a^2(b-c)-3a(b^2-c^2)+3bc(b-c)-(a^2b+b^2c+c^2a+3abc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)+3(b-c)(a^2-ab-ac+bc)-(a^2b+b^2c+c^2a+3abc) \geq 0$$

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = 2(a^3+b^3+c^3)+3(b-c)(a^2-ab-ac+bc)-(a^2b+b^2c+c^2a+3abc)$$

$$\text{và: } t = \frac{b+c}{2}. \text{ Ta có: } f(a, b, c) - f(a, t, t) =$$

$$= 2(b^3+c^3-2t^3)+3(b-c)(a^2-ab-ac+bc)+a^2(t-b)+a(t^2-c^2)+3a(t^2-bc)+(t^3-b^2c)$$

$$\text{Trong đó: } 2(b^3+c^3-2t^3) = \frac{3}{2}(b-c)^2(b+c); \quad a^2(t-b) = -a^2\frac{b-c}{2};$$

$$a(t^2-c^2) = \frac{a(b-c)(b+3c)}{4}; \quad 3a(t^2-bc) = \frac{3}{4}a(b-c)^2; \text{ và } t^3-b^2c = \frac{1}{8}(b-c)(b^2-c^2-4bc)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, t, t) &= \frac{1}{8}(b-c)[12(b^2-c^2)+4a(b-c)+20(a-b)(a-c)] \\ &= \frac{1}{2}(b-c)^2(3b+3c+a) + \frac{5}{2}(a-b)(a-c)(b-c) \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c$ nên $f(a, b, c) - f(a, t, t) \geq 0$ luôn đúng. Mặt khác ta có:

$$f(a, t, t) = 2(a^3+2t^3)-a^2t-t^3-t^2a-3at^2 = 2a^3+3t^3-a^2t-4at^2 = (a-t)^2(2a+3t) \geq 0$$

luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$.

2.2 Phương pháp phân tích bình phương

Định lý 2.1. Cho $S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$ trong đó $f(a, b, c)$, S_a, S_b, S_c là các hàm số của ba biến a, b, c . Khi đó:

- i> Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$
- ii> Nếu $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$ thì $S \geq 0$
- iii> Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b, S_b + S_a, S_b + S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$
- iv> Nếu $a \geq b \geq c \geq 0$, $S_b, S_c \geq 0$ và $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$

Minh họa phương pháp:

Bài toán 2.2. Cho các số thực không âm a, b, c trong đó có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq 2 + \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} - 3 - \left(\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} - 1 \right) \geq 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} - 1 &= \frac{b(a-b)}{(b^2+c^2)} + \frac{c(a-c)}{(b^2+c^2)}; & \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} - 1 &= \frac{c(b-c)}{(c^2+a^2)} + \frac{a(b-a)}{(c^2+a^2)}; \\ \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} - 1 &= \frac{a(c-a)}{(a^2+b^2)} + \frac{b(c-b)}{(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} \frac{b(a-b)}{(b^2+c^2)} + \frac{a(b-a)}{(c^2+a^2)} &= \frac{(a-b)^2(ab-c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}; & \frac{c(b-c)}{(c^2+a^2)} + \frac{b(c-b)}{(a^2+b^2)} &= \frac{(b-c)^2(bc-a^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}; \\ \frac{a(c-a)}{(a^2+b^2)} + \frac{c(a-c)}{(b^2+c^2)} &= \frac{(c-a)^2(ca-b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

Và:

$$\begin{aligned} \frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} - 1 &= -\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) - 8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ &= -\frac{a^2(b^2-c^2)^2 + b^2(c^2-a^2)^2 + c^2(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ &= -\frac{a^2(b+c)^2(b-c)^2 + b^2((c+a)^2(c-a)^2 + c^2(a+b)^2(a-b)^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng tương đương là:

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Trong đó:

$$S_a = \frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(c^2+a^2)} + \frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} = \frac{bc(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0;$$

$$S_b = \frac{ca(2b^2+c^2+a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0; \quad S_c = \frac{ab(2c^2+a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0.$$

Nên theo i> bất đẳng thức: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$ đúng.

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

2.3 Phương pháp ứng dụng bất đẳng thức Schur và bất đẳng thức Schur suy rộng

Định lí Schur:

Với mọi số thực không âm: x, y, z , với mọi số thực dương r ta có:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z$ hoặc $x = y$ và $z = 0$ và các hoán vị của chúng.

Minh hoạ phương pháp:

Bài toán 2.3. (*Balkan Mathematical Olympiad*)

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

Lời giải:

Ta có:

$$a + b + c \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c} \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

luôn đúng. Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq a + b + c$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{cyclic} a^2 \right)^2 &= \left[\sum_{cyclic} \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \sqrt{a(b^2 - bc + c^2)} \right]^2 \\ &\leq \sum_{cyclic} \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} \sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2) \end{aligned}$$

hay:

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{\left(\sum_{cyclic} a^2 \right)^2}{\sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2)}$$

Ta có: $\sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2) = \sum_{sym} a^2b - \sum_{cyclic} abc$ nên:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2) &= (a + b + c) \left(\sum_{sym} a^2b - \sum_{cyclic} abc \right) \\ &= \sum_{sym} a^3b + \sum_{sym} a^2b^2 + \sum_{sym} a^2bc - 3 \sum_{cyclic} a^2bc = \sum_{sym} a^3b + \sum_{sym} a^2b^2 - \sum_{cyclic} a^2bc \end{aligned}$$

Và: $\left(\sum_{cyclic} a^2 \right)^2 = \sum_{cyclic} a^4 + \sum_{sym} a^2b^2$. Do đó:

$$\left(\sum_{cyclic} a^2 \right)^2 \geq (a + b + c) \sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2) \Leftrightarrow \sum_{cyclic} a^4 + \sum_{cyclic} a^2bc \geq \sum_{sym} a^3b$$

đúng theo bất đẳng thức Schur với $r = 2$. Suy ra:

$$\frac{(\sum_{cyclic} a^2)^2}{\sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2)} \geq a + b + c$$

Tóm lại ta có:

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{(\sum_{cyclic} a^2)^2}{\sum_{cyclic} a(b^2 - bc + c^2)} \geq a + b + c \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bất đẳng thức Schur suy rộng:

Với mọi số thực không âm: a, b, c, x, y, z sao cho các bộ số $(a, b, c), (x, y, z)$ là các bộ số đơn điệu thì ta luôn có: $x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ hoặc $a = b$ và $z = 0$ hoặc $b = c$ và $x = 0$

Minh hoạ phương pháp:

Bài toán 2.4. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + bc}{b^3 + c^3} + \frac{b^2 + ac}{c^3 + a^3} + \frac{c^2 + ab}{a^3 + b^3} \geq \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}$$

Lời giải:

Vì bất đẳng thức có tính đối xứng nên không giảm tổng quát, giả sử: $a \geq b \geq c$.

Ta có:

$$\frac{a}{b^2 + c^2 - bc} \geq \frac{a}{b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{a(b+c)}{b^3 + c^3} \geq \frac{a}{b^2 + c^2}$$

Tương tự:

$$\frac{b(c+a)}{c^3 + a^3} \geq \frac{b}{c^2 + a^2}, \frac{c(a+b)}{a^3 + b^3} \geq \frac{c}{a^2 + b^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{b^3 + c^3} + \frac{b^2 + ac}{c^3 + a^3} + \frac{c^2 + ab}{a^3 + b^3} \geq \frac{a(b+c)}{b^3 + c^3} + \frac{b(c+a)}{c^3 + a^3} + \frac{c(a+b)}{a^3 + b^3} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b^3 + c^3} + \frac{b^2 + ac - bc - ba}{c^3 + a^3} + \frac{c^2 + ab - ca - cb}{a^3 + b^3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{b^3 + c^3}(a-b)(a-c) + \frac{1}{c^3 + a^3}(b-c)(b-a) + \frac{1}{a^3 + b^3}(c-a)(c-b) \geq 0 \quad (2.1) \end{aligned}$$

Đặt:

$$x = \frac{1}{b^3 + c^3}, y = \frac{1}{c^3 + a^3}, z = \frac{1}{a^3 + b^3}$$

Vì $a \geq b \geq c$ nên $a^3 + b^3 \geq a^3 + c^3 \geq b^3 + c^3$ suy ra $x \geq y \geq z$

Khi đó:

$$(2.1) \Leftrightarrow x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

đúng theo bất đẳng thức Schur suy rộng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

2.4 Phương pháp ứng dụng định lí Muirhead

Định lí Muirhead cho 3 số:

Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ thỏa:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0; b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0; \\ a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2; \\ a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases}$$

Khi đó với mọi số thực dương x, y, z ta có: $\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_i = b_i$ $i = 1, 2, 3$ hoặc $x = y = z$.

Minh họa phương pháp:

Bài toán 2.5. (USAMO 1997)

Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} \sum_{cyclic} [(a^3 + b^3 + abc)(a^3 + c^3 + abc)abc] &\leq (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{sym} (a^7 bc + 4a^5 b^2 c^2 + 3a^4 b^4 c + a^3 b^3 c^3) &\leq \frac{1}{2} \sum_{sym} (a^7 bc + 2a^6 b^3 + 2a^5 b^2 c^2 + 3a^4 b^4 c + a^3 b^3 c^3) \\ \Leftrightarrow \sum_{sym} a^6 b^3 &\geq \sum_{sym} a^5 b^2 c^2 \quad \text{đúng theo Muirhead vì: } (6; 3; 0) \succ (5; 2; 2) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

2.5 Phương pháp ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng thuần nhất bậc 3

Định lý 2.2. Nếu $P(u, v, w)$ là đa thức đối xứng thuần nhất bậc 3 trên $\mathbb{R}$ và $P(1, 0, 0) \geq 0, P(1, 1, 0) \geq 0, P(1, 1, 1) \geq 0$ thì $P(x, y, z) \geq 0 \quad x, y, z \geq 0$.

Minh hoạ phương pháp:

Bài toán 2.6. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 - ab}{(c + a)(c + b)} + \frac{b^2 + c^2 - bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{c^2 + a^2 - ca}{(b + c)(b + a)} \geq \frac{3}{4}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + b^3}{(a + b)(b + c)(c + a)} + \frac{b^3 + c^3}{(a + b)(b + c)(c + a)} + \frac{c^3 + a^3}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 8(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq 0 \end{aligned}$$

Xét: $P(x, y, z) = 8(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x + y)(y + z)(z + x)$ ta có $P(x, y, z)$ là đa thức đối xứng thuần nhất bậc 3 và $P(1, 0, 0) = 8, P(1, 1, 0) = 10, P(1, 1, 1) = 0$.

Suy ra: $P(a, b, c) \geq 0 \quad a, b, c > 0$ Hay $8(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Chương 3

Phương pháp chuẩn hoá và phương pháp thuần nhất trong chứng minh bất đẳng thức

1 Phương pháp chuẩn hoá

Mệnh đề 3.1. Nếu f là hàm n biến thực thuần nhất bậc m thì với $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ nào đó và $u \in \mathbb{R}^n$ ta có $f(u) \geq 0$ tương đương với $f(tu) \geq 0$.

Chứng minh:

Vì hàm số f thuần nhất bậc m nên $f(tu) = t^m \cdot f(u)$

Do đó với $t > 0$ ta có: $f(tu) \geq 0 \Leftrightarrow t^m f(u) \geq 0 \Leftrightarrow f(u) \geq 0$.

Mệnh đề được chứng minh.

Nhận xét 3.1. Do mệnh đề nói trên nên để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất dạng $f(u) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $f(tu) \geq 0$ với tu thoả mãn một điều kiện đặc biệt và $t > 0$ nào đó, việc chọn số t thích hợp sẽ giúp ta giảm bớt vất vả trong việc biến đổi các biểu thức.

Sử dụng mệnh đề nói trên ta có thể thu hẹp phạm vi cần xét của các biến hơn so với yêu cầu của bài toán. Việc chuyển bài toán chứng minh một bất đẳng thức thuần nhất về việc chứng minh bất đẳng thức đó trong phạm vi hẹp hơn của các biến như trên gọi là chuẩn hoá bất đẳng thức thuần nhất.

1.1 Chứng minh bất đẳng thức thuần nhất bằng phương pháp chuẩn hoá

Bài toán 3.1. (Sưu tầm)

Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải:

Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} - \frac{a+b+c}{2}$$

khi đó $f(a, b, c)$ là hàm số thuần nhất bậc 1 nên nếu tồn tại $t > 0$ mà $f(ta, tb, tc) \geq 0$ thì $f(a, b, c) \geq 0$.

Với $a, b, c > 0$ chọn t là số thoả mãn $ta + tb + tc = 1$ (hay $t = \frac{1}{a+b+c}$) và đặt $a' = ta, b' = tb, c' = tc$.

Khi đó $a', b', c' > 0$ và $a' + b' + c' = 1$. Ta chỉ cần chứng minh:

$$f(a', b', c') \geq 0 \quad \text{với} \quad a' + b' + c' = 1 \quad \text{và} \quad a', b', c' > 0. \quad (3.1)$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a'^2}{1-a'} + \frac{b'^2}{1-b'} + \frac{c'^2}{1-c'} \geq \frac{1}{2} \quad (3.2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} 1^2 &= (a' + b' + c')^2 = \left(\sqrt{1-a'} \frac{a'}{\sqrt{1-a'}} + \sqrt{1-b'} \frac{b'}{\sqrt{1-b'}} + \sqrt{1-c'} \frac{c'}{\sqrt{1-c'}} \right)^2 \\ &\leq (3 - a' - b' - c') \left(\frac{a'^2}{1-a'} + \frac{b'^2}{1-b'} + \frac{c'^2}{1-c'} \right) = 2 \left(\frac{a'^2}{1-a'} + \frac{b'^2}{1-b'} + \frac{c'^2}{1-c'} \right) \end{aligned}$$

hay:

$$\frac{a'^2}{1-a'} + \frac{b'^2}{1-b'} + \frac{c'^2}{1-c'} \geq \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức (3.2) được chứng minh suy ra bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Nhận xét 3.2. Nếu không nhầm lẫn trong cách hiểu và tránh phức tạp trong trình bày lời giải thì trong lời giải trên, kể từ dòng có ký hiệu (3.1) đến hết lời giải, ta có thể dùng bộ số (a, b, c) thay cho bộ số (a', b', c') . Hay nói cách khác, với bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp a, b, c thoả mãn một điều kiện đặc biệt nào đó. Từ bài toán 3.2 đến bài toán 3.4 ta sử dụng cách nói này.

Bài toán 3.2. (Carlson)

Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho thuộc dạng bất đẳng thức thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp: $ab + bc + ca = 3$ (ứng với $t = \sqrt{\frac{3}{ab+bc+ca}}$), khi đó ta cần chứng minh :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$$

Ta có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$

Theo bất đẳng thức AM-GM: $\sqrt[3]{(abc)^2} \leq \frac{ab+bc+ca}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{(abc)^2} \leq 1 \Rightarrow abc \leq 1$ do đó:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 3(a+b+c) - abc \geq 3 \cdot 3 - 1 = 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.3. Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(\sqrt{a^6 + b^6 + c^6}) \geq \sqrt{3}(a+b+c)$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho thuộc dạng bất đẳng thức thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp: $a^6 + b^6 + c^6 = 3$ (ứng với $t = \sqrt[6]{\frac{3}{a^6+b^6+c^6}}$) khi đó ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a+b+c \quad \text{hay:} \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2(a+b+c).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2b^2ac, b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2c^2ab, c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2a^2bc$$

và:

$$0 < a^2b^2c^2 \leq \frac{a^6 + b^6 + c^6}{3} = 1 \Rightarrow a^2b^2c^2 \leq abc$$

$$\text{Suy ra:} \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c) \geq a^2b^2c^2(a+b+c).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.4. (APMO 1998)

Cho các số thực dương a, b, c , chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho thuộc dạng bất đẳng thức thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp: $abc = 1$, khi đó ta cần chứng minh :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2 + 2(a+b+c)$$

Ta có:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2 + 2(a+b+c) \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 2 + 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3 + 2(a+b+c) \Leftrightarrow (ab+bc+ca-2)(a+b+c) \geq 3$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3 \Rightarrow ab+bc+ca-2 \geq 3-2 = 1 \quad \text{và} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

$$\text{nên: } (ab+bc+ca-2)(a+b+c) \geq a+b+c \geq 3.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

2 Phương pháp thuần nhất

2.1 Thuần nhất hoá bất đẳng thức không thuần nhất

Trong những phần trên, chúng ta đã chứng minh một số bất đẳng thức thuần nhất bằng những phương pháp khác nhau. Nhưng với những bất đẳng thức không thuần nhất thì sao? Chúng ta đã biết, chỉ những đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh với nhau được còn những đại lượng khác bậc chỉ có thể so sánh được với nhau trong những điều kiện nào đó. Mặc khác có nhiều bất đẳng thức không thuần nhất được tạo ra từ bất đẳng thức thuần nhất. Sử dụng yếu tố này chúng ta sẽ chuyển một số bất đẳng thức không thuần nhất, có điều kiện về dạng bất đẳng thức thuần nhất. Việc làm đó được gọi là thuần nhất hoá bất đẳng thức không thuần nhất. Sau khi thuần nhất hoá xong, chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thuần nhất thu được bằng những phương pháp đã nêu trong những phần trước.

Định lý 3.1. Với a, b, c là các số thực không âm, đặt:

$$p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc.$$

Khi đó ta có:

$$(1') \quad p^2 \geq 3q$$

$$(2') \quad pq \geq 9r$$

$$(3') \quad p^3 \geq 27r$$

$$(4') \quad q^2 \geq 3pr$$

$$(5') \quad 2p^3 + 9r \geq 7pq$$

$$(6') \quad p^2q + 3pr \geq 4q^2$$

$$(7') \quad p^2q \geq 3pr + 2q^2$$

$$(8') \quad pq^2 \geq 2p^2r + 3qr$$

$$(9') \quad q^3 + 9r^2 \geq 4pqr$$

$$(10') \quad 2q^3 + 9r^2 \geq 7pqr$$

$$(11') \quad p^3 - 4pq + 9r \geq 0$$

$$(12') \quad p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr \geq 0$$

$$(13') \quad p^4 + 4q^2 \geq p^2q + 30pr$$

$$(14') \quad p^3r + q^3 \geq 6pqr$$

2.2 Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp thuần nhất

Bài toán 3.5. (IMO Short list 1996)

Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Lời giải:

Vì $abc = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyclic} \frac{a^2 b^2 c}{a^5 + b^5 + a^2 b^2 c} \leq 1 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyclic} a^2 b^2 c (b^5 + c^5 + a b^2 c^2) (c^5 + a^5 + a^2 b c^2) \leq (a^5 + b^5 + a^2 b^2 c) (b^5 + c^5 + b^2 c^2 a) (c^5 + a^5 + c^2 a^2 b) \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyclic} a^{11} b^2 c^2 + 2 \sum_{sym} a^8 b^4 c^3 + \sum_{sym} a^7 b^6 c^2 + \sum_{cyclic} a^7 b^7 c + \sum_{cyclic} a^5 b^5 c^5 \\
& \leq \sum_{cyclic} a^{11} b^2 c^2 + \sum_{sym} a^{10} b^5 + \sum_{sym} a^8 b^4 c^3 + \sum_{sym} a^7 b^7 c + \sum_{sym} a^7 b^6 c^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{sym} a^{10} b^5 + \sum_{sym} a^7 b^7 c \geq \sum_{sym} a^8 b^4 c^3 + \sum_{cyclic} a^7 b^7 c + \sum_{cyclic} a^5 b^5 c^5 \\
& \Leftrightarrow (\sum_{sym} a^{10} b^5 - \sum_{sym} a^8 b^4 c^3) + \frac{1}{2} (\sum_{sym} a^7 b^7 c - \sum_{sym} a^5 b^5 c^5) \geq 0 \quad \text{đúng theo Muirhead.}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.6. (IMO Short list 1995)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Đặt $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2} \quad \text{hay} \quad \sum_{cyclic} \frac{x^4 y^4}{z^5(x^3+y^3)} \geq \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyclic} \frac{x^4 y^4}{z^5(x^3+y^3)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyclic} x^9 y^9 (y^3+z^3)(z^3+x^3) \geq 3x^5 y^5 z^5 (x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3) \\
& \Leftrightarrow 2 \sum_{cyclic} x^{12} y^{12} + 2 \sum_{sym} x^{12} y^9 z^3 + 2 \sum_{cyclic} x^9 y^9 z^6 \geq 3 \sum_{sym} x^{11} y^8 z^5 + \sum_{sym} x^8 y^8 z^8 \\
& \Leftrightarrow \sum_{sym} x^{12} y^{12} + 2 \sum_{sym} x^{12} y^9 z^3 + \sum_{sym} x^9 y^9 z^6 \geq 3 \sum_{sym} x^{11} y^8 z^5 + \sum_{sym} x^8 y^8 z^8 \\
& \Leftrightarrow (\sum_{sym} x^{12} y^{12} - \sum_{sym} x^{11} y^8 z^5) + 2(\sum_{sym} x^{12} y^9 z^3 - \sum_{sym} x^{11} y^8 z^5) + \\
& \quad + (\sum_{sym} x^9 y^9 z^6 - \sum_{sym} x^8 y^8 z^8) \geq 0
\end{aligned}$$

đúng theo Muirhead.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Sử dụng điều kiện: $ab + bc + ca = 1$ để thuần nhất hoá, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Đây chính là dạng của bất đẳng thức Iran 1996

Đặt: $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$ thì $p, q, r > 0$ và:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} = \frac{\sum_{cyclic} (a+b)^2(a+c)^2}{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2} = \frac{p^4 - 2p^2q + q^2 + 4pr}{(pq - r)^2}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$4(p^4q - 2p^2q^2 + q^3 + 4pqr) \geq 9(p^2q^2 + r^2 - 2pqr)$$

$$\text{hay } 4p^4q - 17p^2q^2 + 34pqr + 4q^3 - 9r^2 \geq 0$$

$$\text{hay } pq(p^3 - 4pq + 9r) + 3q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + 2q(p^2q + 3pr - 4q^2) + r(pq - 9r) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo (11'), (12'), (6') và (2').

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

3 Sáng tạo bất đẳng thức

3.1 Sáng tạo bất đẳng thức từ bất đẳng thức Schur

Từ bất đẳng thức Schur ta đã có:

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

Với mọi $x, y, z \geq 0, r > 0$ hoặc $x, y, z > 0, r \in \mathbb{R}$

Khi chọn $r = 1, x, y, z > 0$ và đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ ta có:

$$\sum_{cyclic} \frac{1}{a^3} + \frac{3}{abc} \geq \sum_{sym} \frac{1}{a^2b}$$

Nhân hai vế với abc ta được: $\sum_{cyclic} \frac{ab}{c^2} + 3 \geq \sum_{sym} \frac{a}{b}$

$$\text{hay: } \sum_{cyclic} \frac{a^2+b^2}{ab} - \sum_{cyclic} \frac{ab}{c^2} \leq 3 \quad \text{hay: } \sum_{cyclic} \frac{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{a^2bc} \leq 3$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán thứ nhất:

Cho các số thực dương a, b, c chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{a} + \frac{b^2c^2 + b^2a^2 - c^2a^2}{b} + \frac{c^2a^2 + c^2b^2 - a^2b^2}{c} \leq 3abc$$

Từ bất đẳng thức Schur, đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ ta có:

$$x^r(x-y)(x-z) = \frac{1}{a^r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = \frac{-1}{abc} \frac{(b-c)(b-a)}{ba^r}$$

Xét tương tự với $y^r(y-z)(y-x)$ và $z^r(z-x)(z-y)$ và thế vào bất đẳng thức Schur ta có bài toán sau:

Bài toán thứ hai:

Cho các số thực dương a, b, c chứng minh rằng với mọi số thực x ta có:

$$\frac{(a-b)(a-c)c^x}{a} + \frac{(b-c)(b-a)a^x}{b} + \frac{(c-a)(c-b)b^x}{c} \leq 0$$

Từ bất đẳng thức Schur, đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ ta có:

$$\sum_{cyclic} x^r(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyclic} (a+b)^r(a-b)(b-c) \geq 0$$

Chia hai vế cho $[(a+b)(b+c)(c+a)]^r$ ta có: $\sum_{cyclic} \frac{(a-b)(a-c)}{[(a+b)(a+c)]^r} \geq 0$

Ta có bài toán sau:

Bài toán thứ ba:

Cho các số thực không âm a, b, c trong đó có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x ta có:

$$\frac{(a-b)(a-c)}{[(a+b)(a+c)]^x} + \frac{(b-c)(b-a)}{[(b+c)(b+a)]^x} + \frac{(c-a)(c-b)}{[(c+a)(c+b)]^x} \geq 0$$

Từ bất đẳng thức Schur, đặt $x = 2a+b, y = 2b+c, z = 2c+a$ ta có:

$$\sum_{cyclic} x^r(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyclic} (2b+c)^r(2a-b-c)(2b-c-a) \leq 0$$

Chia hai vế cho $[(2a+b)(2b+c)(2c+a)]^r$ ta có:

$$\sum_{cyclic} \frac{(2a-b-c)(2b-c-a)}{[(2a+b)(2c+a)]^r} \leq 0$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán thứ tư:

Cho các số thực không âm a, b, c trong đó có nhiều nhất một số bằng 0. Chứng minh rằng với mọi số thực dương r ta có:

$$\frac{(2a-b-c)(2b-c-a)}{[(2a+b)(2c+a)]^r} + \frac{(2b-c-a)(2c-a-b)}{[(2b+c)(2a+b)]^r} + \frac{(2c-a-b)(2a-b-c)}{[(2c+a)(2b+c)]^r} \leq 0$$

3.2 Sáng tạo bất đẳng thức từ bất đẳng thức Schur suy rộng

Ta đã biết bất đẳng thức Schur suy rộng:

Với mọi số thực không âm: a, b, c, x, y, z sao cho các bộ số $(a, b, c), (x, y, z)$ là các bộ số đơn điệu thì ta luôn có:

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ hoặc $a = b$ và $z = 0$ hoặc $b = c$ và $x = 0$

Trước hết giả sử $a \geq b \geq c > 0$ thì ta có:

$$ab \geq ac \geq bc, \quad a + b \geq a + c \geq b + c,$$

$$\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{ab}, \quad \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}.$$

Khi đó với hai số thực không âm m, n ta có:

$$\frac{a^m}{(b+c)^n} \geq \frac{b^m}{(a+c)^n} \geq \frac{c^m}{(a+b)^n}$$

Do đó ta có bài toán sau:

Bài toán thứ năm:

Cho các số thực dương a, b, c chứng minh rằng với mọi số thực không âm m, n ta có:

$$\frac{a^m(a-b)(a-c)}{(b+c)^n} + \frac{b^m(b-c)(b-a)}{(c+a)^n} + \frac{c^m(c-a)(c-b)}{(a+b)^n} \geq 0$$

Nếu chọn $m = n = 1$ thì bất đẳng thức trên sẽ trở thành:

$$\sum_{cyclic} \frac{a^3 + abc}{b+c} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Khi đó nếu xét thêm $a^2 + 1 \geq 2a, b^2 + 1 \geq 2b, c^2 + 1 \geq 2c$ hay:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - 3$$

ta có bài toán sau:

Bài toán thứ sáu:

Cho các số thực dương a, b, c chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + abc}{b+c} + \frac{b^3 + abc}{c+a} + \frac{c^3 + abc}{a+b} \geq 2(a + b + c) - 3$$

3.3 Sáng tạo bất đẳng thức bằng cách sử dụng phương pháp chuẩn hoá

Từ bất đẳng thức Schur: $\sum_{cyclic} x^2(x-y)(x-z) \geq 0$

$$\text{hay } \sum_{sym} x^4 + \sum_{sym} x^2y^2 - \sum_{sym} x^3y \geq 0 \quad \text{hay} \quad p^4 + 3pr \geq 5q^2$$

Trong đó $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Lần lượt thực hiện chuẩn hoá: $q = 5, p = 5, pr = \frac{1}{3}$ ta có các bài toán sau:

Bài toán thứ bảy:

Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 5$, chứng minh rằng:

$$(x + y + z)^4 + 3xyz(x + y + z) \geq 125$$

Bài toán thứ tám:

Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn điều kiện $x + y + z = 5$, chứng minh rằng:

$$(xy + yz + zx)^2 - 3xyz \leq 125$$

Bài toán thứ chín:

Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2yz + y^2zx + z^2xy = \frac{1}{3}$, chứng minh rằng:

$$(x + y + z)^4 - 5(xy + yz + zx)^2 + 1 \geq 0.$$

Xét

$$A = \sum_{cyclic} (x - y)(x^3 - y^3), B = \sum_{cyclic} x^2(x - y)(x - z)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} mA + nB &= m\left(\sum_{sym} x^4 - \sum_{sym} x^3y\right) + n\left(\sum_{cyclic} x^4 + \sum_{cyclic} x^2yz - \sum_{sym} x^3y\right) \\ &= (2m + n) \sum_{cyclic} x^4 - (m + n) \sum_{sym} x^3y + n \sum_{cyclic} x^2yz \\ &= (2m + n)(p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr) - (m + n)(p^2q - 2q^2 - pr) + npr \\ &= (2m + n)p^4 - (9m + 5n)p^2q - 2(3m + 2n)q^2 + 3(3m + 2n)pr \end{aligned}$$

Trong đó $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Với $x, y, z, m, n \geq 0$ thì $mA + nB \geq 0$ từ đó ta có kết quả tổng quát là:

$$(2m + n)p^4 - (9m + 5n)p^2q - 2(3m + 2n)q^2 + 3(3m + 2n)pr \geq 0$$

Chọn $n = 2m$ và thực hiện chuẩn hoá $p = 1$ ta có bài toán sau:

Bài toán thứ mười:

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$, chứng minh rằng:

$$14(xy + yz + zx)^2 - 19(xy + yz + zx) + 21xyz + 4 \geq 0$$

Kết luận

Qua quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn này, tác giả đã thực hiện được một số nội dung chính sau đây:

1. Tìm tòi, chắc lọc và sắp xếp theo trình tự, có hệ thống các kiến thức cơ bản gồm: Hàm số thuần nhất; Hàm số đối xứng; Bất đẳng thức Schur; Bất đẳng thức Muirhead; Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân; Bất đẳng thức Cauchy- Schwarz.

2. Trình bày một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức thuần nhất gồm: Phương pháp dồn biến; Phương pháp phân tích bình phương; Phương pháp ứng dụng bất đẳng thức Schur; Phương pháp ứng dụng bất đẳng thức Muirhead ; Phương pháp ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng thuần nhất bậc ba và phương pháp chuẩn hoá.

3. Trình bày phương pháp thuần nhất để chứng minh một số bài toán bất đẳng thức có điều kiện.

4. Với mỗi phương pháp nêu trên đều có phần minh hoạ phương pháp qua việc chứng minh một số bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế.

5. Vận dụng phối hợp các bất đẳng thức Schur, Muirhead, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân và phương pháp chuẩn hoá để đưa ra mười bài toán về bất đẳng thức.

Với việc sử dụng các kiến thức cơ bản, phổ biến, sơ cấp, luận văn này sẽ là một tài liệu tham khảo trong việc dạy và học về nội dung bất đẳng thức.