

ĐỀ THI CHUYỂN HỆ HỌC KÌ I NĂM HỌC 2016-2017

Môn thi: Toán lớp 10

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y(1-x)^2 = \frac{1}{6} \\ x(1-y)^2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Câu 2. Cho x, y, z là các số dương thoả mãn

$$\frac{1}{x+yz} + \frac{1}{y+zx} = \frac{1}{x+y}.$$

Chứng minh rằng $z \geq 3$.

Câu 3. Cho các số nguyên dương a, b, c thoả mãn $c^2 + 1$ chia hết cho $a(a+b)(a+2b)$. Chứng minh rằng b chia hết cho 12.

Câu 4. Trên cạnh AC của tam giác nhọn ABC lấy một điểm D tùy ý sao cho D khác A và C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD , kí hiệu là (ABD) , cắt cạnh BC tại điểm E khác B . Các tiếp tuyến tại B, D của (ABD) gặp nhau tại T . Giả sử đường thẳng AT cắt (ABD) tại điểm F khác A và E . Gọi M là trung điểm AF , G là giao điểm của các đường thẳng CF, DE , và N là giao điểm của các đường thẳng AE và MD . Chứng minh rằng

(a) AG, DF, BC đồng quy tại một điểm (Kí hiệu điểm đó là H).

(b) $NH \parallel AF$.

Hướng dẫn giải

1 Hệ đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x)^2 = x(1-y)^2 \\ x(1-y)^2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

◦ **Với $xy = 1$:** thế vào phương trình thứ hai cho ta

$$\begin{aligned}(1-x)^2 &= \frac{x}{6} \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Do đó ta nhận được $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ hoặc $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

- **Với $x = y$:** thế vào phương trình thứ hai cho ta

$$\begin{aligned} x(1-x)^2 &= \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 12x^2 + 6x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 &= 2x^3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Do đó ta nhận được $(x, y) = \left(\frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}} \right)$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}\right).$$

2 Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

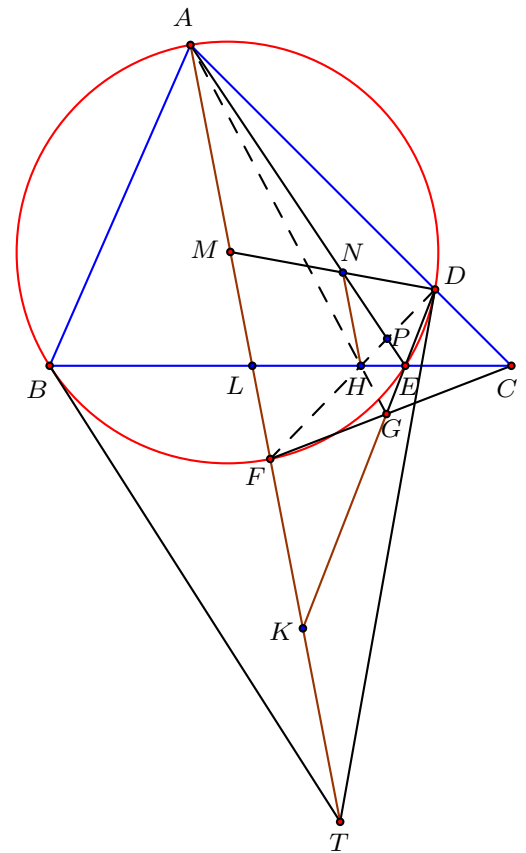
$$\frac{1}{x+y} \geq \frac{4}{(x+yz) + (y+zx)} = \frac{4}{(x+y)(z+1)}.$$

Do đó $z + 1 \geq 4$ hay $z \geq 3$.

3 Đầu tiên ta nhận xét rằng $c^2 + 1$ không chia hết cho 3, 4 và cũng không có ước dương nào có dạng $4k + 3$. Nếu $3 \nmid b$ thì $a, a + b, a + 2b$ chia cho 3 được 3 số dư khác nhau. Do đó có một số chia hết cho 3. Suy ra $3 \nmid c^2 + 1$, mâu thuẫn. Vậy $3 \mid b$.

Mặt khác a là số lẻ vì nếu a chẵn thì $4 \mid c^2 + 1$, mâu thuẫn. Do nhận xét đầu tiên nên $a \equiv 1 \pmod{4}$. Nếu $b \equiv 1 \pmod{4}$ thì $a + 2b \equiv 3 \pmod{4}$. Nếu $b \equiv 2 \pmod{4}$ thì $a + b \equiv 3 \pmod{4}$. Nếu $b \equiv 3 \pmod{4}$ thì $a + 2b \equiv 3 \pmod{4}$. Tất cả các trường hợp này đều không thể xảy ra. Vậy $b \equiv 0 \pmod{4}$. Tóm lại $12 \mid b$.

4 Gọi $DE \cap AT = K$ và $L = BC \cap AT$. Do $ABFD$ điều hoà, nên $(AFLK) = E(AFBD) = -1$. Suy ra $(DGEK) = C(DGEK) = (AFLK) = -1$, hay $(GDEK) = -1 = (AFLK)$. Vậy AG, DF, EL đồng quy ở H .



Mặt khác $A(GDEK) = -1$, suy ra $(HDFP) = -1$, với $P = DF \cap AE$. Từ đó $N(HDFP) = -1$. Mà M là trung điểm AF . Do đó $NH \parallel AF$.

Biên soạn đề và đáp án: **TS. Hà Duy Hưng**