Đường thẳng Euler và mở rộng

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này giới thiệu các mở rộng của đường thẳng Euler với các kiến thức dùng cho THCS

Đường thẳng Euler có thể coi là một trong những định lý quen thuộc nhất của hình học phẳng. Khái niệm đường thẳng Euler trước hết liên quan đến tam giác, sau đó đã được mở rộng và ứng dụng cho tứ giác nội tiếp và cả n-giác nội tiếp, nhưng vì khối lượng kiến thức quá lớn nên trong bài viết nhỏ này tôi chỉ mong muốn trình bày những vấn đề cô đọng xúc tích nhất liên quan đến khái niệm này trong tam giác. Xin hẹn các bạn chuyên đề mở rộng cho đa giác ở những bài giảng tiếp sau.

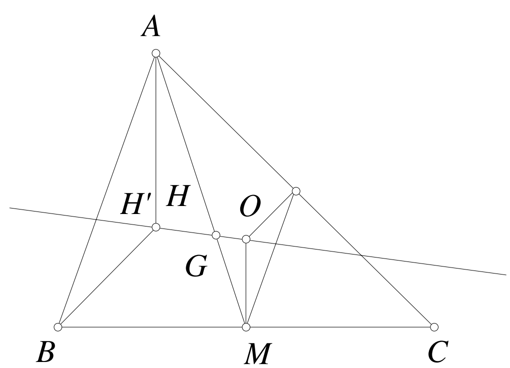
Bài 1 (Đường thẳng Euler)**.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng. Hơn nữa $\dfrac{GH}{GO} = 2$. Đường thẳng nối H, G, O gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải

Bài toán này có nhiều lời giải, lời giải sau đây sử dụng định lý Thales khá đơn giản, nó là chìa khóa cho một bài tổng quát hơn.

Trên tia đối tia GO lấy H' sao cho $GH' = 2GO$. Gọi M là trung điểm BC. Theo tính chất trọng tâm thì G thuộc AM và $GA = 2GM$. Áp dụng định lý Thales vào tam giác GOM dễ suy ra $AH' \parallel OM \quad (1)$.

Mặt khác do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm BC nên $OM \perp BC \quad (2)$



Hình 1.

Từ $(1), (2)$ suy ra $AH' \perp BC$, tương tự $BH' \perp CA$ vậy $H' \equiv H$ là trực tâm tam giác ABC. Theo cách dựng H' ta có ngay kết luận bài toán.

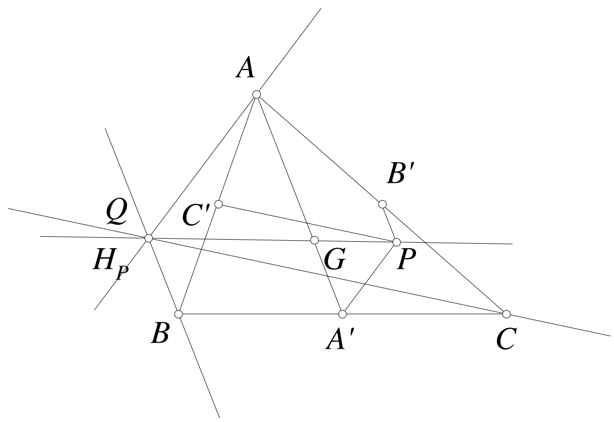
Bài 2 (Mở rộng đường thẳng Euler)**.** Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA', PB', PC' đồng quy tại một điểm H_P, hơn nữa H_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GP} = 2$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A', B', C' lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại một điểm O_P, hơn nữa O_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GO_P}{GP} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

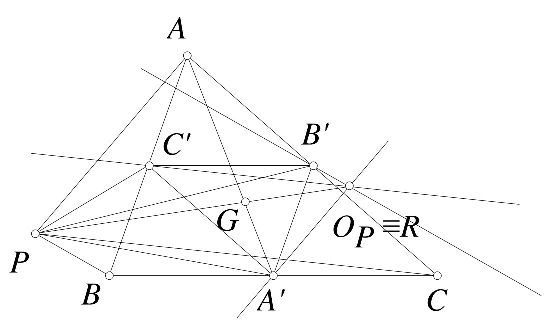
a) Ta thấy rằng kết luận của bài toán khá rắc rối, tuy nhiên ý tưởng của lời giải bài 1 giúp ta đi đến một lời giải rất ngắn gọn như sau



Hình 2.

Lấy điểm Q trên tia đối tia tia GP sao cho $GQ = 2GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA' dễ suy ra $AQ \parallel PA'$. Chứng minh tương tự $BQ \parallel PB', CQ \parallel PC'$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA', PB', PC' đồng quy tại $Q \equiv H_P$. Hơn nữa theo cách dựng Q thì H_P, G, O thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GO} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.

b) Ta có môt lời giải tương tự. Lấy điểm R trên tia đối tia tia GP sao cho $GR = \frac{1}{2}GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA dễ suy ra $AR \parallel PA$. Chứng minh tương tự $BR \parallel PB, CR \parallel PC$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại $R \equiv O_P$. Hơn nữa theo cách dựng R thì O_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GP}{GO_P} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.



Hình 3.

Nhận xét. Bài toán trên thực sự là mở rộng của đường thẳng Euler. Phần a) khi $P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC ta có ngay $H_P \equiv H$ là trực tâm tam giác ABC. Ta thu được nội dung của bài toán đường thẳng Euler. Phần b) khi $P \equiv H$ trực tâm của tam giác ABC thì $O_P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Sau đây chúng ta hãy ứng dụng các bài toán này vào những bài hình học khác. Ở đây thuật ngữ góc tạo bởi hai đường thẳng để chỉ góc bé nhất trong bốn góc tạo thành khi hai đường thẳng đó cắt nhau, chúng ta thường ký hiệu góc tạo bởi hai đương thẳng x, y là (x, y).

Bài 3. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng (cùng hướng). Chứng minh rằng góc tạo bởi đường thẳng Euler của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ bằng góc hợp bởi hai đường thẳng BC và $B'C'$.

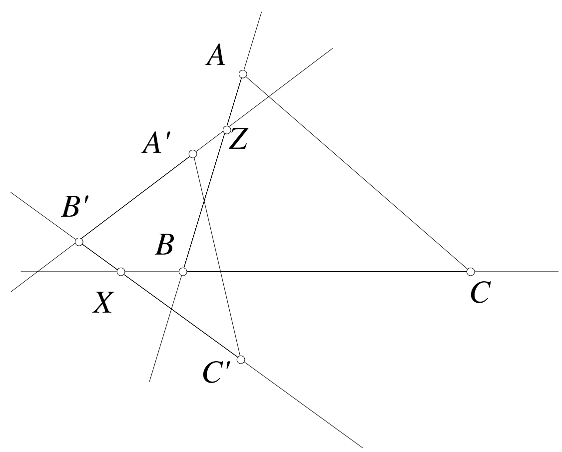
Lời giải

Để chứng minh bài toán này, chúng ta sử dụng bổ đề đơn giản sau

Bổ đề 3.1. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng (cùng hướng) thì $(AB, A'B') = (BC, B'C') = (CA, C'A')$.

Lời giải

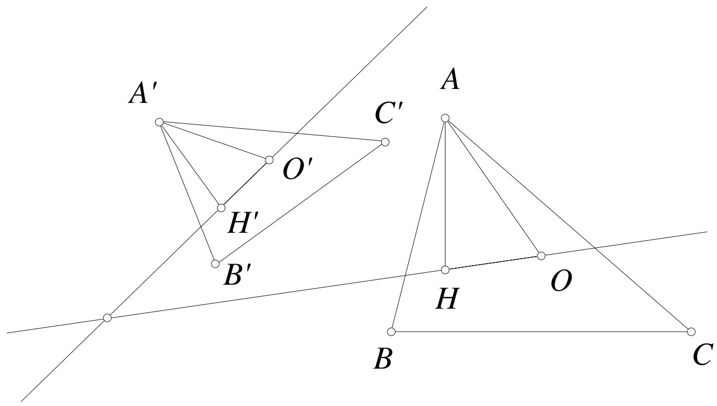
Chúng ta sẽ sử dụng ngôn ngữ của tứ giác nội tiếp để diễn đạt lời giải này cho chặt chẽ. Gọi X là giao điểm của BC và $B'C'$, Z là giao của AB và $A'B'$. Do $\widehat{B} = \widehat{B'}$ nên tứ giác $B'ZBX$ nội tiếp.



Hình 4.

Từ đó dễ suy ra $\widehat{C'XB} = \widehat{BZA'}$ (hoặc $\widehat{B'XB} = \widehat{A'ZA}$) hay $(BC, B'C') = (CA, C'A')$. Chứng minh tương tự ta được $(AB, A'B') = (BC, B'C') = (CA, C'A')$.

Trở lại bài toán. Gọi O, O', H, H' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$.



Hình 5.

Đường thẳng Euler của tam giác ABC và $A'B'C'$ là OH và $O'H'$. Từ tính chất cơ bản của hai tam giác đồng dạng ta dễ chứng minh được $\triangle AOH \sim \triangle A'O'H'$. Do đó theo bổ đề $(OH, O'H') = (HA, H'A') = (BC, B'C') = (CA, C'A') = (AB, A'B')$. Đó là điều phải chứng minh.

Sau đây chúng ta chủ yếu tập trung vào chứng minh sự đồng quy của các đường thẳng Euler.

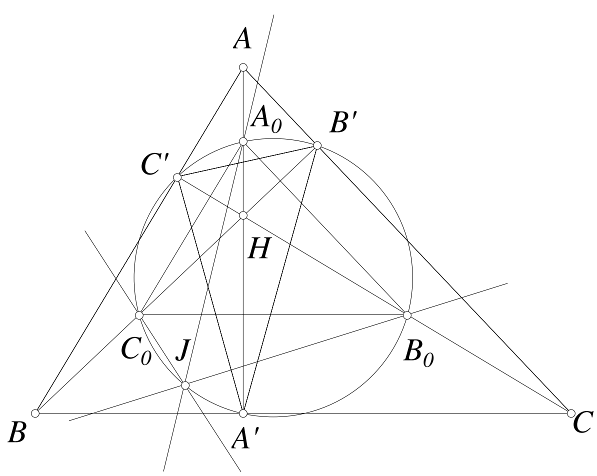
Bài 4. Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

Gọi H là giao điểm ba đường cao AA', BB', CC', A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm HA, HB, HC, d_a, d_b, d_c lần lượt là đường thẳng Euler của tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$. Ký hiệu đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ là (XYZ), ký hiệu này chúng ta sẽ dùng trong cả bài viết này.

Ta chú ý rằng A_0, B_0, C_0 cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ nên d_a, d_b, d_c lần lượt đi qua A_0, B_0, C_0.

Ta chú ý rằng $(A'B'C') \equiv (A_0B_0C_0)$ chính là đường tròn chín điểm của tam giác ABC. Nếu ta chứng minh được d_b, d_c cắt nhau tại một điểm trên $(A'B'C')$ thì tương tự d_c, d_a và d_a, d_b chũng cắt nhau tại một điểm trên đường tròn $(A'B'C')$, mặt khác d_a, d_b, d_c lần lượt có điểm chung A_0, B_0, C_0 với $(A'B'C')$ nên chúng chỉ còn một điểm chung khác nữa, do đó chúng đồng quy tại một điểm trên $(A'B'C')$.



Hình 6.

Vậy ta tập trung vào chứng minh kết luận giao điểm J của d_b, d_c nằm trên $(A'B'C')$. Thật vậy, ta dễ chứng minh được các tam giác $A'B'C$ và $A'BC'$ đồng dạng (cùng hướng). Do đó theo bài 3 góc tạo bởi đường thẳng Euler $(d_b, d_c) = (B'C, BC') = (AB, AC) = (A_0B_0, A_0C_0)$ (đẳng thức cuối là do $AB \parallel A_0B_0, AC \parallel A_0C_0$). Ta chú ý rằng góc hợp bởi hai đường thẳng là góc bé nhất trong bốn góc tạo thành khi hai đường thẳng đó cắt nhau, do đó tứ giác $A_0B_0JC_0$ nội tiếp hay giao điểm J của d_b, d_c nằm trên $(A_0B_0C_0) \equiv (A'B'C')$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Điểm đồng quy J của ba đường thẳng Euler nói trên thường được gọi là điểm Jerabek của tam giác ABC. Điểm Jerabek có nhiều tính chất hình học thú vị, bạn đọc có thể tham khảo thêm trong [3,4].

Bài 5. Cho tam giác ABC trực tâm H. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác HBC, HCA, HAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

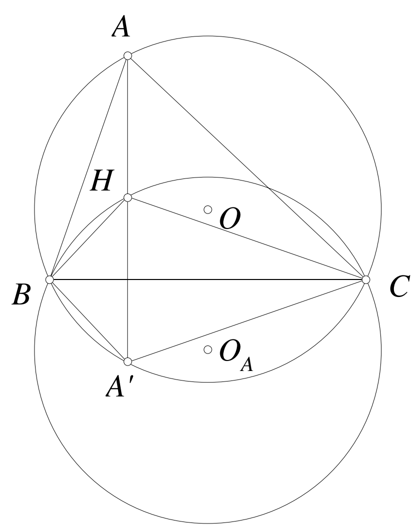
Lời giải

Để giải bài toán này chúng ta cần hai bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 5.1 Cho tam giác ABC trực tâm H. Thì $(HBC), (HCA)$, (HAB) lần lượt đối xứng với (ABC) qua BC, CA, AB.

Lời giải

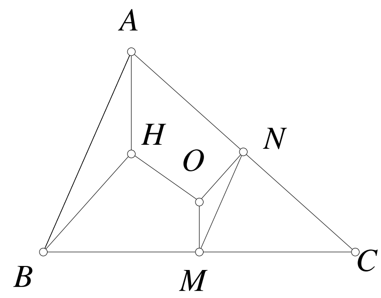
Gọi giao điểm khác A của HA với (ABC) là A'. Theo tính chất trực tâm và góc nội tiếp dễ thấy $\widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{A'BC}$. Do đó tam giác HBA' cân tại B hay H và A' đối xứng nhau qua BC do đó (HBC) đối xứng (ABC). Tương tự cho $(HCA), (HAB)$, ta có điều phải chứng minh.



Hình 7.

Bổ đề 5.2 Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, M là trung điểm BC thì $HA = 2OM$.

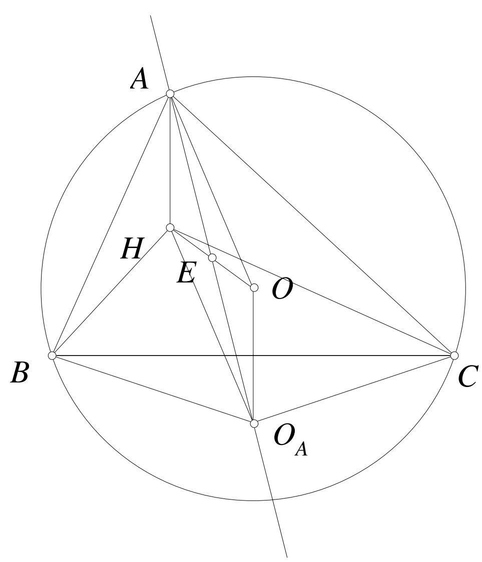
Lời giải



Hình 8.

Gọi N là trung điểm CA dễ thấy $OM \parallel HA$ do cùng vuông góc BC và $OM \parallel HB$ do cùng vuông góc CA nên ta có tam giác $\triangle HAB \sim \triangle OMN$ tỷ số $\dfrac{AB}{MN} = 2$. Do đó $HA = 2OM$, đó là điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Gọi O_A là tâm (HBC) theo bổ đề 5.1 thì O_A đối xứng O qua BC, kết hợp bổ đề 5.2 suy ra OO_A song song và bằng OH nên tứ giác AHO_AA là hình bình hành nên AO_A đi qua trung điểm E của OH. Tuy nhiên dễ thấy A là trực tâm tam giác HBC do đó đường thẳng Euler của tam giác HBC là AO_A đi qua E. Tương tự thì đường thẳng Euler của các tam giác HCA, HAB cũng đi qua E nằm trên OH là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.



Hình 9.

Nhận xét. Điểm đồng quy E là trung điểm OH cũng chính là tâm đường tròn chín điểm quen thuộc. Đường tròn chín điểm đi qua chín điểm gồm trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm đoạn nối trực tâm và đỉnh, đường tròn này cũng được biết đến với tên gọi là đường tròn Euler của tam giác.

Bài 6. Cho tam giác ABC tâm đường tròn nội tiếp I. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải

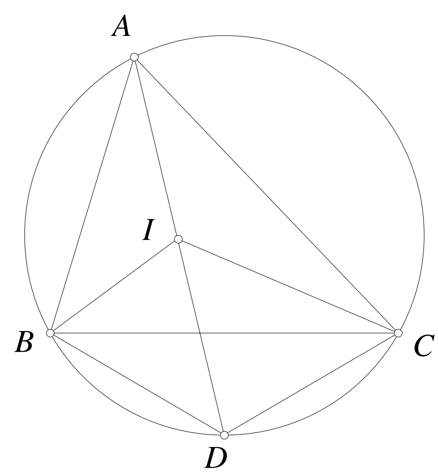
Ta sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. IA cắt (O) tại điểm D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

Lời giải

Sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc ngoài tam giác ta có
$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \widehat{IBA} + \widehat{IAC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{BID}$

Vậy tam giác IDB cân tại D. Tương tự tam giác ICD cân tại D do đó $DI = DB = DC$ vậy D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.



Hình 10.

Bổ đề 6.2 (Định lý Menelaus)**.** Cho tam giác ABC một đường thẳng cắt ba cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C' thì

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

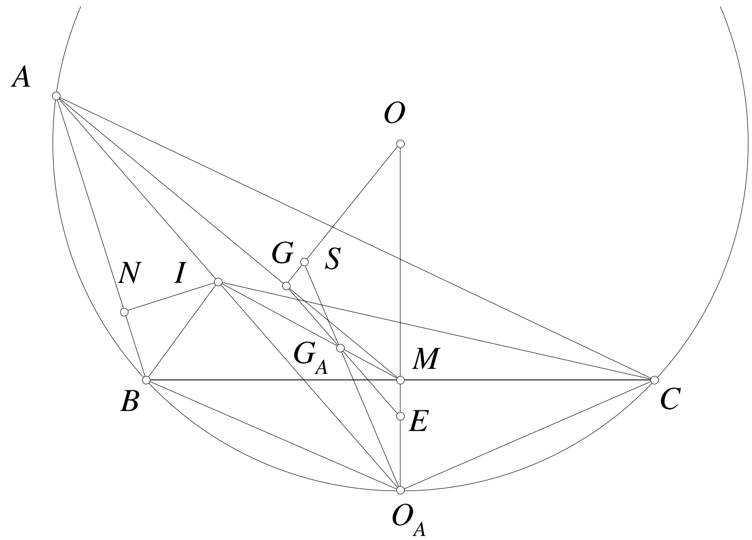
Định lý đã được chứng minh chi tiết trong §7 của [7].

Trở lại bài toán. Gọi O là tâm (ABC), IA giao (ABC) tại điểm O_A khác A, G, G_A lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, IBC, M là trung điểm BC, GG_A cắt OO_A tại E.

Theo bổ đề 6.1 và các tính chất cơ bản ta thấy O_A là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó OO_A vuông góc BC tại M. $\dfrac{IG_A}{IM} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3}$ nên $GG_A \parallel AO_A$ suy ra $\dfrac{O_AE}{O_AM} = \dfrac{2}{3}$ (1), hơn nữa $\dfrac{G_AE}{G_AG} = \dfrac{IO_A}{IA} = \dfrac{CO_A}{IA}$ (2).

Gọi G_AO_A (đường thẳng Euler của tam giác IBC) cắt OG (đường thẳng Euler của tam giác ABC tại S). Ta sẽ chứng minh rằng S cố định.

Gọi N là hình chiếu của I lên AB. Do $\widehat{AIB} = \widehat{BCO_A}$ nên hai tam giác vuông $\triangle IAN$ và $\triangle O_ACM$ đồng dạng. Do đó $\dfrac{IA}{O_AC} = \dfrac{IN}{MO_A} = \dfrac{r}{MO_A}$ hay $r = \dfrac{CO_A}{MO_A.IA}$ (3).



Hình 11.

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác GOE có S, G_A, O_A thẳng hàng ta có

$$\begin{aligned}1 &= \frac{SG}{SO}.\frac{O_AO}{O_AE}.\frac{G_AE}{G_AG}\\ &= \frac{SG}{SO}.\frac{R}{\dfrac{3}{2}O_AM}.\frac{CO_A}{IA} \text{ (do (1), (2))}\\ &= \frac{SG}{SO}.\frac{2R}{3r} \text{ (do (3))}\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{3r}{2R}$, do đó S cố định. Tương tự, các đường thẳng Euler của tam giác ICA, IAB cũng đi qua S nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Điểm đồng quy S thường được gọi là điểm Schiffler của tam giác ABC. Bạn đọc có thể tham khảo thêm tính chất điểm này trong [3,4]

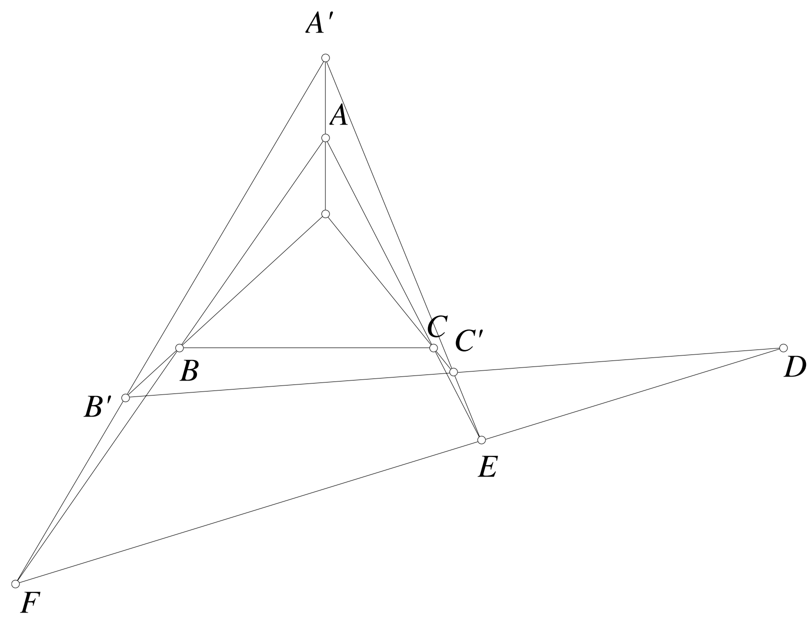
Qua hai bài 5, 6 chúng ta thử đặt ra câu hỏi về một bài toán tổng quát, có những điểm P nào trong tam giác mà đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy ?(Rõ ràng là tính chất này không đúng với mọi P trong mặt phẳng). Thực chất quỹ tích các điểm P như vậy là một đường cong bậc 3 hợp với đường tròn ngoại tiếp tam giác, bài toán đó đã vượt qua khuôn khổ của chuyên đề này. Tuy vậy chúng ta có thể đưa bài toán đó về một bài toán đơn giản hơn mà có thể coi như là một dấu hiệu để xét sự đồng quy của ba đường thẳng Euler, đó là bài toán dưới đây

Bài 7. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. O_A, O_B, O_C lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy khi và chỉ khi AO_A, BO_B, CO_C đồng quy.

Lời giải

Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 7.1 (Định lý Desargues)**.** Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ nếu gọi D, E, F tương ứng là giao của $B'C', C'A', A'B'$ với BC, CA, AB. Khi đó $AA', BB', C'C'$ đồng quy khi và chỉ khi D, E, F thẳng hàng.



Hình 12.

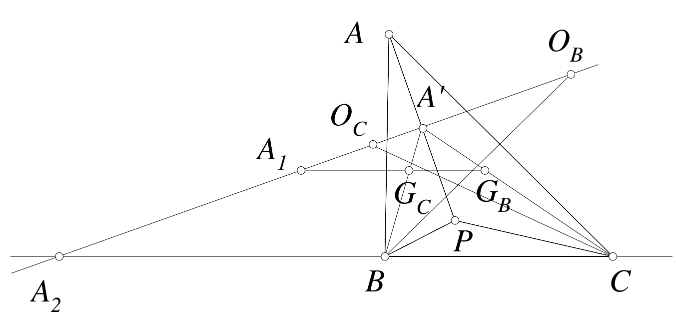
Bổ đề đã được chứng minh chi tiết trong §7 của [7].

Trở lại bài toán. Gọi G_A, G_B, G_C lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB, các đường thẳng Euler tương ứng là O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C. Áp dụng bổ đề 7.1 cho tam giác $O_AO_BO_C$ và tam giác $G_AG_BG_C$ ta thấy O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C đồng quy khi và chỉ khi giao điểm tương ứng của $O_BO_C \cap G_BG_C = \{A_1\}; O_CO_A \cap G_CG_A = \{B_1\}; O_AO_B \cap G_AG_B = \{C_1\}$ thẳng hàng (1).

Cũng áp dụng bổ đề 7.1 ta lại thấy AO_A, BO_B, CO_C đồng quy khi và chỉ khi khi giao điểm tương ứng của $O_BO_C \cap BC = \{A_2\}; O_CO_A \cap CA = \{B_2\}; O_AO_B \cap AB = \{C_2\}$ thẳng hàng (2).

Bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra được (1) và (2) tương đương. Tức là A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Thật vậy, gọi A' là trung điểm PA, ta đẽ thấy O_B, O_C, A_1, A_2 và A' đều nằm trên trung trực của PA. Áp dụng tính chất trọng tâm ta thấy ngay đường thẳng chứa G_B, G_C, A_1 song song đường thẳng chứa B, C, A_2. Từ đó sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có ngay $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C} = \dfrac{A_2B}{A_2C}$.



Hình 13.

Tương tự cho các đỉnh B, C ta có $\dfrac{B_1G_C}{B_1G_A} = \dfrac{B_2C}{B_2A}, \dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = \dfrac{C_2A}{C_2B}$. Nhân các tỷ số ta thu được $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C} . \dfrac{B_1G_C}{B_1G_A} . \dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = \dfrac{A_2B}{A_2C} . \dfrac{B_2C}{B_2A} . \dfrac{C_2A}{C_2B}$

Sử dụng đẳng thức trên, ta áp dụng định lý Menelaus vào các tam giác $G_AG_BG_C, ABC$ thì A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C} . \dfrac{B_1G_C}{B_1G_A} . \dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = 1$ khi và chỉ khi $\dfrac{A_2B}{A_2C} . \dfrac{B_2C}{B_2A} . \dfrac{C_2A}{C_2B} = 1$ khi và chỉ khi A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. Suy ngược lại các kết quả ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Dấu hiệu AO_A, BO_B, CO_C đồng quy có thể coi là kiểm tra dễ dàng hơn so với việc trực tiếp chỉ ra ba đường thẳng Euler đồng quy. Ta dễ dàng kiểm chứng lại điều đó trong các bài 5 và 6. Sau đây là hai bài toán tương tự để áp dụng tính chất này

Bài 8. Cho tam giác ABC dựng ra ngoài các tam giác đều BCA', CAB', ABC'

a) Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm F (Gọi là điểm Fermat của tam giác ABC), nếu $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < 120^\circ$ thì F nằm trong tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC và P là điểm bất kỳ, chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy.

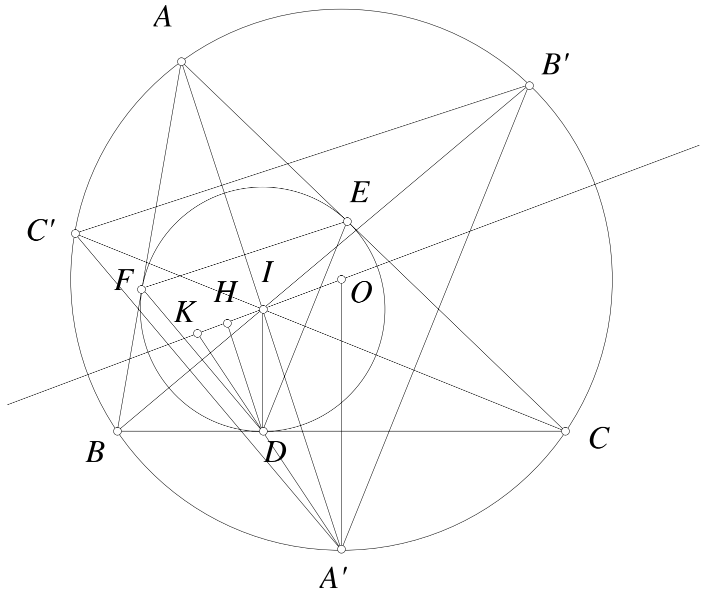
Nhận xét. Chúng ta vẫn còn một điều nghi vấn là tại sao các điểm đồng quy của ba đường thẳng Euler luôn nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC ? Thực chất đây là một tính chất thú vị tuy vậy việc chứng minh nó cũng vượt quá khuôn khổ của chuyên đề này, chúng ta hãy chỉ tham khảo phát biểu của nó

Bài 10. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. Nếu đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy thì điểm đồng quy nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Ta có một chú ý rằng bài 9 cũng đã nói lên tính chất đồng quy này đúng với mọi P trong mặt phẳng nhưng với tam giác ABC đều, điều này cũng phù hợp với bài 10 vì ta biết rằng với tam giác đều ta coi đường thẳng Euler của nó là mọi đường thẳng đi qua trọng tâm của nó.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội (I) tiếp tiếp xúc ba cạnh tam giác tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC.

Lời giải



Hình 14.

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm khác A, B, C của IA, IB, IC với đường tròn ngoại tiếp (O). Khi đó A' là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó $OA' \perp BC$ suy ra $OA' \parallel ID$. Gọi giao điểm của $A'D$ với OI là K, áp dụng định lý Thales vào tam giác KOA' ta thấy ngay $\dfrac{KD}{KA'} = \dfrac{KI}{KO} = \dfrac{ID}{OA'} = \dfrac{r}{R}$ trong đó r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoai tiếp tam giác. Do đó K cố định, tương tự $B'E, C'F$ đi qua K.

Lấy điểm H thuộc đoạn KO sao cho $\dfrac{KH}{KI} = \dfrac{r}{R}$. Áp dụng định lý Thales trong tam giác KIA' ta thấy $\dfrac{KH}{KI} = \dfrac{KD}{KA'}$ (cùng bằng $\dfrac{r}{R}$) nên $DH \parallel IA'$. Bằng tính chất tia phân giác và tam giác cân dễ thấy $IA' \equiv AI \perp EF$ do đó $DH \perp EF$. Chứng minh tương tự $EH \perp DF, FH \perp ED$ hay H là trực tâm của tam giác DEF. Ta chú ý rằng I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, vậy IH là đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua O. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài 11 là một kết quả rất hay gặp về đường thẳng Euler, nhờ đó ta có thể chứng minh được kết quả thú vị khác như sau

Bài 12. Cho tam giác ABC, các đường cao $AA', BB'CC'$ đồng quy tại H. Gọi D, E, F là hình chiếu của H lên $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác ABC trùng nhau.

Lời giải

Ta đã biết một kết quả quen thuộc đó là trực tâm H của tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Khi đó theo bài 11, đường thẳng Euler của tam giác DEF chính là đường thẳng nối H và N, trong đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Mặt khác tâm N đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ chính là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC do đó NH cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét. Áp dụng bài 12 ta lại có một kết quả thú vị khác

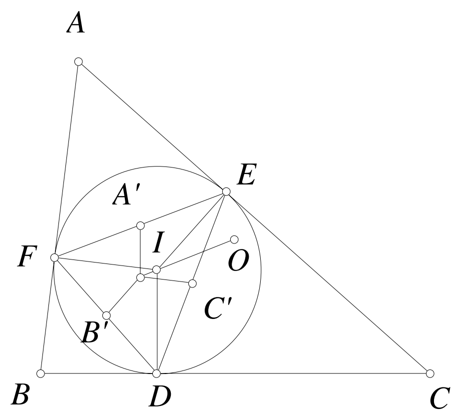
Bài 13. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Tâm các đường tròn bàng tiếp I_a, I_b, I_c. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác $I_aI_bI_c$ trùng nhau.

Lời giải

Ta áp dụng kết quả bài 11 vào tam giác $I_aI_bI_c$, ta chú ý rằng I chính là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 14. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. A', B', C' lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB đồng qui tại một điểm trên đường thẳng OI trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Hình 15.

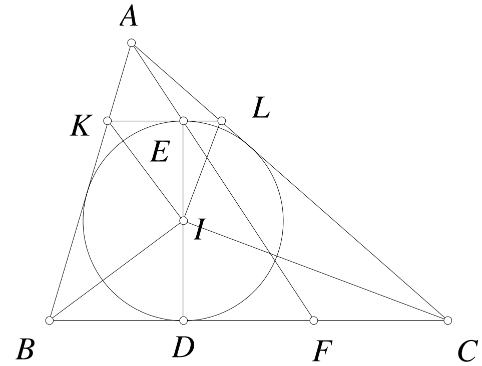
Ta dễ thấy ID, IE, IF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB nên các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB sẽ tương ứng song song với ID, IE, IF. Áp dụng phần b) bài 2 ta suy ra các đường thẳng này đồng quy tại một điểm trên IG với G là trọng tâm tam giác DEF. Tuy nhiên IG cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác DEF. Theo bài 11 IG đi qua O. Như vậy điểm đồng quy nằm trên IO. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể có kết quả tổng quát hơn khi thay I bởi điểm P bất kỳ trong tam giác ABC như sau

Bài 15. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ, gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua trung điểm $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Bài 16. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Lần lượt gọi DP, EQ, FR là đường kính của (I), chứng minh rằng AP, BQ, CR đồng quy tại một điểm nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

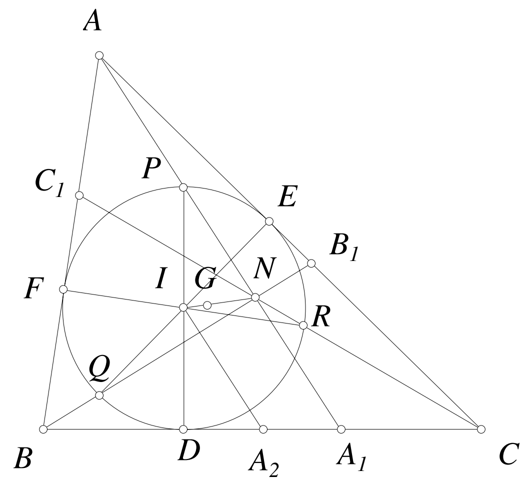


Hình 16.

Bài toán có nhiều cách tiếp cận, ở đây ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 16.1. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc BC tại D. Gọi DE là đường kính của I. AE cắt BC tại F thì $BD = CF$.

Lời giải



Hình 17.

Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại E của (I) với AB, AC lần lượt là K, L. Gọi r là bán kính của (I). Ta chú ý rằng KI, LI lần lượt là phân giác các góc $\widehat{BKL}$ và góc $\widehat{CLK}$. Từ đó ta dễ thấy $\triangle KEI \sim \triangle IDB$ (g.g) suy ra $KE.BD = ID.IE = r^2$. Tương tự $EL.DC = ID.IE = r^2$ do đó $KE.BD = EL.DC$

Suy ra $\dfrac{EL}{BD} = \dfrac{KE}{DC} = \dfrac{EL + KE}{DB + DC} = \dfrac{KL}{BC} \quad (1)$

Dễ thấy $KL \parallel BC$. Theo định lý Thales ta có

$\dfrac{EL}{FC} = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{KL}{BC} \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ ta dễ suy ra $BD = FC$, ta chứng minh được bổ đề.

Trở lại bài toán. Gọi giao điểm của AP với BC là A_1 và trung điểm BC là A_2. Theo bổ đề $BD = CA_1$ vậy A_2 cũng là trung điểm DA_1, I là trung điểm DP do đó suy ra $IA_2 \parallel AA_1$. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2 thì $IB_2 \parallel BB_1, IC_2 \parallel CC_1$.

Từ đó ta áp dụng bài 2 a) với điểm I ta suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm N nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC hơn nữa $GN = 2GI$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu bạn đọc quen với định lý Ceva có thể thấy nếu dùng riêng bổ đề 16.1 cũng có thể chứng minh được các đường AP, BQ, CR đồng quy tuy vậy để chứng minh điểm đồng quy nằm trên IG sẽ gặp không ít khó khăn. Điểm đồng quy N của ba đường thẳng này còn có tên gọi là điểm Nagel trong tam giác ABC. Điểm Nagel cũng có rất nhiều tính chất hình học thú vị, các bạn có thể tham khảo thêm trong [3,4]

Như vậy, khi đọc xong chuyên đề này các bạn dường như đã trải qua một chặng đường khá dài với rất nhiều ứng dụng và mở rộng của đường thẳng Euler. Thực ra trong bài viết nhỏ này mới chỉ đề cập đến ứng dụng và mở rộng của khái niệm đường thẳng Euler trong tam giác, mặt khác với những công cụ khá hạn chế thì những ứng dụng hay và sâu sắc của đường thẳng Euler trong tam giác vẫn chưa được chứng minh hoặc chưa được đề cập tới. Do vậy, việc ứng dụng mở rộng các khái niệm này cho tứ giác hoặc đi tìm những lời giải sơ cấp cho những bài toán còn chưa giải hoặc chưa đề cập đến trong chuyên đề này vẫn còn chờ bạn đọc, rất mong bạn đọc quan tâm.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10*, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10*, NXBGD 2008

[3] Altshiller-Court N., *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Courier Dover Publications, 2 Rev Enl edition, 2007

[4] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Courier Dover Publications, 2007.

[5] AoPS Forum http://www.artofproblemsolving.com/