

Chuyên Đề:

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

TRONG CHỨNG MINH

BẤT ĐẲNG THỨC

Bộ: Lê Việt Hưng

Hà Trung Kiên

1 Lời nói đầu

Bất đẳng thức luôn là một phần quan trọng trong các kì thi, đặc biệt là kì thi HSG. Thực tế, các bài thi càng ngày càng khó và phức tạp, yêu cầu học sinh có tính sáng tạo cao. Trong đó, tư duy đơn giản hoá vấn đề là thực sự cần thiết. Một trong những phương pháp hữu hiệu để thực hiện chính là đặt ẩn phụ. Đối mặt với những bất đẳng thức cồng kềnh, phức tạp thì ẩn phụ thường phát huy hiệu quả rõ rệt. Vì thế, tác giả viết chuyên đề này nhằm giới thiệu khái quát cũng như bàn luận về một trong những hướng đi tự nhiên mà hiệu quả trong các bài toán, không riêng gì bất đẳng thức.

2 Cơ sở lý thuyết

2.1 Một số vấn đề liên quan tới điều kiện ràng buộc

Trong các bài toán, ta thường xuyên gặp các bất đẳng thức với điều kiện ràng buộc, ví dụ

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 & a^2 + b^2 + c^2 &= 3 \\ a, b, c &\geq 0 & ab + bc + ca + abc &= 4 \end{aligned}$$

Sau đây sẽ trình bày một số các đổi điều kiện, thêm điều kiện, bớt điều kiện nhờ các cách đặt ẩn phụ cơ bản. Lưu ý rằng tất cả các kĩ thuật sau đây chỉ đúng với các bất đẳng thức thuần nhất và hầu hết trong điều kiện $a, b, c > 0$.

Chuẩn hoá

Giả sử ta có đa thức

$$f(a, b, c) = \frac{a}{b + c}$$

Bây giờ ta đặt

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a + b + c} \\ y = \frac{b}{a + b + c} \\ z = \frac{c}{a + b + c} \end{cases}$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta thu được

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ f(x, y, z) &= \frac{x}{y + z} \end{aligned}$$

Nói một cách không quá máy móc, $f(a, b, c) \approx f(x, y, z)$ tuy nhiên ta có thêm điều kiện $x + y + z = 1$. Thao tác tạo thêm điều kiện cho $f(a, b, c)$ mà không thay đổi tính chất của nó gọi là chuẩn hoá.

Đồng bậc hoá

Đồng bậc hoá, hay thuần nhất bất đẳng thức là thao tác ngược của chuẩn hoá. Đôi khi gặp những bất đẳng thức mà điều kiện ràng buộc quá xấu hay khó sử dụng, ta đưa bất đẳng thức về dạng thuần nhất để xử lí hay thay đổi điều kiện ràng buộc.

2.2 Phương pháp đặt Viète cho đa thức đối xứng

Đối với bất đẳng thức đối xứng 2 biến $f(x, y) \geq g(x, y)$ ta đặt

$$\begin{aligned} a &= x + y \\ b &= xy \end{aligned}$$

Sau đó biểu diễn f, g theo a, b và sử dụng $a^2 \geq 4b (\geq 0)$

Ưu thế của phép đặt này là chỉ phải sử dụng duy nhất một bất đẳng thức là $a^2 \geq 4b$ do đó ta dễ dàng rút b và quy điều phải chứng minh về hàm chỉ chứa a . Tuy nhiên điều kiện sử dụng khá khó khăn, thường chỉ dùng được cho các bài toán có bậc thấp, biến đổi ít phức tạp.

Đối với bất đẳng thức đối xứng 3 biến, ta có phép đổi ẩn p, q, r như sau

$$\begin{cases} p = a + b + c \\ q = ab + bc + ca \\ r = abc \end{cases}$$

Phương pháp pqr là một cách đặt ẩn phụ quen thuộc của bất đẳng thức đối xứng 3 biến và được sử dụng rộng rãi. Ta có một số hằng đẳng thức và một số bất đẳng thức thông dụng với cách đặt này

$$\begin{aligned} \sum a^2 &= p^2 - 2q & \sum (a+b)(b+c) &= p^2 + q & \sum a^3 &= p^3 - 3pq + 3r \\ \sum ab(a+b) &= pq - 3r & \prod (a+b) &= pq - r & \sum a^2b^2 &= q^2 - 2pr \\ \sum a^4 &= p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr & \sum a^3b^3 &= q^3 - 3pqr + 3r^2 & \sum ab(a^2+b^2) &= p^2q - 2q^2 - pr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^2 &\geq 3q & p^3 &\geq 27r & q^2 &\geq 3pr \\ pq &\geq 9r & p^3 + 9r &\geq 4pq & p^2q + 3pr &\geq 4q^2 \\ r &\geq \frac{p(4q-p^2)}{9} & r &\geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} \end{aligned}$$

2.3 Một số phép đổi ẩn thường dùng liên quan tới điều kiện ràng buộc

Trước tiên ta đến với điều kiện $abc = 1$, một điều kiện hết sức quen thuộc. Có rất nhiều cách đổi ẩn, tùy mục đích (để thuận nhất, ...) tác giả sẽ nêu ra một số thường dùng.

$$(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right), \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right), \left(\frac{xy}{z^2}, \frac{xz}{y^2}, \frac{yz}{x^2}\right), \left(\frac{x^2}{yz}, \frac{y^2}{xz}, \frac{z^2}{xy}\right)$$

Sau đây ta đến với một điều kiện phức tạp hơn.

$$\begin{aligned} abc &= a + b + c + 2 \\ \Leftrightarrow \prod (a+1) &= \sum (a+1)(b+1) \\ \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a+1} &= 1 \end{aligned}$$

Như vậy, nếu đặt

$$x = \frac{1}{a+1} \quad y = \frac{1}{b+1} \quad z = \frac{1}{c+1}$$

thì ta sẽ có hệ sau

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x} \\ b = \frac{1-y}{y} = \frac{x+z}{y} \\ c = \frac{1-z}{z} = \frac{x+y}{z} \end{cases}$$

Như vậy, ta đã chứng tỏ sự tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $(a, b, c) = \left(\frac{y+z}{x}, \frac{x+z}{y}, \frac{x+y}{z}\right)$

Hệ thức trên chính là phép đặt thường dùng trong điều kiện $abc = a + b + c + 2$

* Tương tự, ta có công thức cho các điều kiện sau

$$\begin{aligned} ab + bc + ca + 2abc &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum \frac{a}{1+a} &= 1 \\ (a, b, c) &\rightarrow \left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{x+z}, \frac{z}{x+y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab + bc + ca + abc &= 4 \\ \Leftrightarrow \sum \frac{2a}{2a+1} &= 1 \\ (a, b, c) &\rightarrow \left(\frac{2x}{y+z}, \frac{2y}{x+z}, \frac{2z}{x+y}\right) \end{aligned}$$

2.4 Phương pháp chặn giá trị

Một số bất đẳng thức mà các biến chạy bị chặn trên hoặc dưới. Ví dụ $x \geq 3, y \leq 5$. Khi đó ta có thể đặt $x = 3 + a, y = 5 - b$ với $a, b \geq 0$.

Ta cũng có thể tự chặn điều kiện bằng cách sắp xếp các ẩn. Ví dụ: $a + b + c = 3$. Nếu bất đẳng thức hoán vị đối xứng ta hoàn toàn có thể giả sử $a \geq b \geq c$ tức cho ta $a = 1 + x, c = 1 - y, b = 1 + y - x (x, y \geq 0)$ Như vậy, ta đã giảm số ẩn từ 3 xuống 2.

Nhược điểm của phương pháp này là khối lượng tính toán lớn, với bất đẳng thức có từ 2 điểm rơi trở lên thì rất khó sử dụng.

3 Ví dụ

Ta làm quen với phương pháp đặt ẩn phụ bằng một bài toán quen thuộc.

Bài Toán 1 Chứng minh rằng với mọi số thực x, y ta có

$$(x+y)^4 + 4(x+y) + 4 \geq 4xy(2x+2y+3)$$

Bài toán không quá khó, nhưng quan trọng là tìm ra hướng đi. Trước hết ta thấy rằng bất đẳng thức không thuần nhất nên không thể chuẩn hoá. Ta thấy bất đẳng thức đối xứng nhưng lại có thể âm khiến cho việc sử dụng các bất đẳng thức cổ điển, ví dụ AM-GM không dễ dàng. Đặc biệt, bất đẳng thức có đến 2 dấu đẳng thức nên phương pháp chặn sẽ khó khăn. Như vậy, bằng cách loại trừ, ta đã xác định được hướng đi đầu tiên là bằng cách đặt Viète. Lời giải sau đây sẽ minh chứng cho điều đó.

Lời giải

Đặt $a = x + y, b = xy$ ta có $a^2 \geq 4b$ và bất đẳng thức cần chứng minh quy về

$$a^4 + 4a + 4 \geq 4b(2a + 3)$$

Sử dụng $a^2 \geq 4b$ ta sẽ chứng minh rằng

$$a^4 + 4a + 4 \geq a^2(2a + 3) \Leftrightarrow a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - a - 2)^2 \geq 0$$

Ta thu được bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = 1$ hoặc $x = y = \frac{-1}{2}$.

Từ ví dụ trên ta thấy sức mạnh của phương pháp đặt ẩn phụ trong chứng minh bất đẳng thức. Có thể thấy lời giải trên hết sức gọn gàng, dễ hiểu. Ta cùng đến tới một loạt ví dụ vận dụng phương pháp này.

Bài Toán 2 [Lê Việt Hưng] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x + \frac{1}{y}} + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} + \frac{1}{z + \frac{1}{x}} \geq \frac{3}{2}$$

Định hướng lời giải

Trước tiên ta thử thay thế một số hạng tử trong các phân thức bằng điều kiện $xyz = 1$ xem liệu ta có thu được một bất đẳng thức đơn giản và dễ chứng minh hay không. Bằng một số phép biến đổi, ta có thể thu được các bất đẳng thức tương đương sau

$$\sum \frac{1}{x + yz} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\sum \frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\sum \frac{y^2 z^2}{y^2 z^2 + 1} \geq \frac{3}{2} \quad (3)$$

Rõ ràng bất đẳng thức (1),(2),(3) sẽ khó xử lý do sự bất đồng bậc. Từ đó ta thử nghĩ tới việc thuần nhất bất đẳng thức để thu về một bất đẳng thức đồng bậc, đối xứng. Thật vậy, bạn đọc có thể tham khảo hướng đi sau.

Lời giải

Từ giả thiết $xyz = 1$ dẫn ta đến ý tưởng đổi biến thông thường nhất là đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; c = \frac{c}{a}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{c}{b}} + \frac{1}{\frac{b}{c} + \frac{a}{c}} + \frac{1}{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}} = \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

Như vậy ta đã thuần nhất bất đẳng thức để quy về dạng quen thuộc đó chính là bất đẳng thức Nesbit. Bất đẳng thức này không khó và có rất nhiều cách chứng minh. Việc hoàn thiện lời giải xin dành cho bạn đọc.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$

Bài Toán 3 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Giống như bài 2, ta đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{\frac{x}{y} \left(\frac{y}{z} + 1 \right)} + \frac{1}{\frac{y}{z} \left(\frac{z}{x} + 1 \right)} + \frac{1}{\frac{z}{x} \left(\frac{x}{y} + 1 \right)} = \frac{yz}{xy + zx} + \frac{zx}{yz + xy} + \frac{xy}{zx + yz} \geq \frac{3}{2}$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối là bất đẳng thức Nesbit nên luôn đúng. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$

Bài Toán 4 [IMO 2000]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Lời giải

Từ $abc = 1$ ta có thể đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y)}{xyz} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz$$

$$\Leftrightarrow \sum x(x - y)(x - z) \geq 0 \quad (1)$$

Do bất đẳng thức thuần nhất và đối xứng, không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$. Ta viết (1) thành

$$(x - y)^2(x + y - z) + z(x - z)(y - z) \geq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$

Trong các ví dụ 2,3,4 ta đã tìm cách thuần nhất để đưa về những bất đẳng thức quen thuộc. Tuy nhiên trong ví dụ 5 sau đây, ta sẽ làm ngược, tức là từ bất đẳng thức thuần nhất, ta tự tạo điều kiện để giải.

Bài Toán 5

Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xy^3}{(z^2 + xy)(y^2 + xz)} + \frac{yz^3}{(x^2 + yz)(z^2 + yx)} + \frac{zx^3}{(y^2 + xz)(x^2 + zy)} \geq \frac{3}{4}$$

Định hướng lời giải

Dễ thấy rằng biến đổi trực tiếp sẽ yêu cầu khối lượng tính toán lớn, vì vậy ta nghĩ đến việc chuẩn hoá để đơn giản hoá bài toán. Câu hỏi đặt ra là liệu ta sẽ chuẩn hoá như thế nào? Ta thử với các phép chuẩn hoá quen thuộc cho $x + y + z, xy + yz + xz$ rõ ràng không mang lại nhiều hiệu quả. Vậy ta sẽ nghĩ đến chuẩn hoá $xyz = 1$. Cùng ý tưởng ấy nhưng có nhiều cách đi, ta chú ý rằng

$$L.H.S = \sum \frac{\frac{xy}{z^2}}{\left(\frac{xy}{z^2} + 1\right) \left(\frac{xz}{y^2} + 1\right)}$$

Như vậy nếu đặt

$$a = \frac{xy}{z^2} \quad b = \frac{xz}{y^2} \quad c = \frac{yz}{x^2}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sum \frac{a}{(a+1)(b+1)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \sum 4a(c+1) &\geq 3(abc + \sum ab + \sum a + 1) \\ \Leftrightarrow a + b + c + ab + bc + ca &\geq 3abc + 3 \end{aligned}$$

Với chú ý $abc = 1$ ta dễ có điều phải chứng minh. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài Toán 6 Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$$

Về trái $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ là 1 hệ quả quen thuộc, bạn đọc có thể tự chứng minh

Ta quan tâm nhiều hơn tới về bên phải $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$ Đây là 1 bất đẳng thức mạnh

hơn so với bất đẳng thức sau: $a+b+c \leq \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$

Để giải quyết bài toán này thì ta sẽ sử dụng kỹ thuật đặt ẩn phụ như sau để đưa bài toán về dạng quen thuộc.

Lời giải

Đặt $\frac{bc}{a} = x, \frac{ca}{b} = y, \frac{ab}{c} = z$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$

Bài Toán 7 [VMO 1996] Cho $x, y, z \geq 0$ và $xy + yz + xz + xyz = 4$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \geq xy + yz + xz$$

Đây là một bài toán đẹp và hay. Điểm khó nhất của bài toán chính là ở điểm rơi. Ngoài TH $x = y = z$ thì $x = 0, y = z = 2$ và các hoán vị cũng cho dấu đẳng thức. Để xử lý ta có thể nghĩ tới việc đổi biến bằng công thức ở phần lý thuyết như lời giải 1 sau.

Lời giải 1

Như đã trình bày ở trên, ta có thể đổi ẩn $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{2a}{b+c}, \frac{2b}{a+c}, \frac{2c}{a+b} \right)$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum a(a-b)(a-c) \geq 0$$

Bài toán này đã được chứng minh ở trên. Ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 1$ và $(x, y, z) \sim (0, 2, 2)$

Ngoài ra, ta cũng có thể giải bằng phương pháp pqr và bất đẳng thức Schur giống lời giải 2.

Lời giải 2

Ta có phép đặt quen thuộc

$$p = a + b + c \quad q = ab + bc + ca \quad r = abc$$

Như vậy $q + r = 4$ và ta phải chứng minh $p \geq q \Leftrightarrow r \geq 4 - p$

Để có $0 \leq r \leq 1$

Mặt khác

$$\frac{p^2}{3} \geq q = 4 - r \geq 3$$

Từ đó cũng có $p \geq 3$

Nếu $p \geq 4$ thì $r \geq 0 \geq 4 - p$

Nếu $3 \leq p \leq 4$ ta có

$$4 - q = r \geq \frac{4pq - p^3}{9} \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 36}{4p + 9}$$

Ta phải chứng minh

$$p \geq \frac{p^3 + 36}{4p + 9} \Leftrightarrow (p - 3)(p + 3)(4 - p) \geq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài Toán 8 Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x \leq 1, y \leq 2, x + y + z = 6$. Chứng minh rằng

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 4xyz$$

Đề bài cho ta 2 dữ kiện $x \leq 1, y \leq 2$ nên dấu đẳng thức không thể xảy ra tại TH 3 biến bằng nhau dù biểu thức là đối xứng. Nhằm thấy dấu đẳng thức xảy ra tại $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ và đây là TH duy nhất nên ta có thể sử dụng phương pháp chặn giá trị.

Lời giải

Đặt $x = 1 - a, y = 2 - b, z = 3 + a + b$ với $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 2$

Ta biến đổi biểu thức cần chứng minh về

$$5a^2 + 10a + 2b^2 + 2b - ab(3a + 3b + 1) \Leftrightarrow 3a^2(2 - b) + 3b^2(1 - a) + a(9 - b) + b(2 - b) + a(1 - a) \geq 0$$

Với $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 2$ rõ ràng bất đẳng thức cuối đúng. Ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 1, y = 2, z = 3$.

Nhận xét

Bài toán vẫn đúng nếu thay dữ kiện thành $x \leq 1, y \geq 3$

Thật vậy, đặt $x = 1 - a, y = 3 + b, z = 2 + a - b$ với $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 3$

Ta phải chứng minh

$$3a^2b + 8a^2 + 2b^2 + 8a + 2b \geq 3ab^2 + 5ab$$

Ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned} 8a &\geq \frac{8ab^2}{9} & \frac{10b^2}{9} &\geq \frac{10ab^2}{9} & 3a^2 &\geq a^2b \\ \frac{8b^2}{9} + 5a^2 &\geq \frac{4\sqrt{10}ab}{3} > 3ab & ab^2 + b &\geq 2ab & 2a^2b + b &\geq 0 \end{aligned}$$

Cộng lần lượt các bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra tại $x = 1, y = 3, z = 2$.

Bài Toán 9 Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{4a^2b^2 + (a + b)^2}{(a - b)^2} \geq 2$$

Rõ ràng ta thấy dấu đẳng thức không xảy ra tại $a = b = c$ dù biểu thức là hoàn toàn đối xứng. Để giải bài toán này, ta cần một chút tinh tế và cảm quan toán học.

Lời giải

Chú ý rằng $4a^2b^2 + (a+b)^2 = \frac{1}{2}((2ab+a+b)^2 + (2ab-a-b)^2)$. Từ đây ta viết lại bất đẳng thức

$$\sum \frac{(2ab+a+b)^2}{(a-b)^2} + \sum \frac{(2ab-a-b)^2}{(a-b)^2} \geq 4$$

Đặt

$$A = \sum \frac{(2ab+a+b)^2}{(a-b)^2} \quad B = \sum \frac{(2ab-a-b)^2}{(a-b)^2}$$

Trước tiên ta chứng minh rằng $A \geq 2$, $B \geq 2$ chứng minh tương tự.

Đặt

$$\begin{aligned} x &= \frac{2ab+a+b}{a-b} \\ y &= \frac{2bc+b+c}{b-c} \\ z &= \frac{2ca+c+a}{c-a} \end{aligned}$$

Dễ có $(x+1)(y+z)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow xy+yz+zx = 1$ và ta cần chứng minh $x^2+y^2+z^2 \geq 2$
Thuần nhất bất đẳng thức ta phải chứng minh

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\geq -2(xy+yz+zx) \\ &\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \end{aligned}$$

Hoàn tất chứng minh.

Nhận xét

Nếu ta cho $a, b, c \rightarrow 0$ thì rõ ràng $\sum \frac{4a^2b^2}{(a-b)^2} \rightarrow 0$ như vậy ta đặt ra câu hỏi liệu $\sum \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \geq 2$ có là bất đẳng thức đúng hay không. May mắn thay, bất đẳng thức trên đúng và có lời giải khá đơn giản, có hướng đi giống với phép chứng minh $A \geq 2$ như sau
Đặt

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{a-b} \\ y &= \frac{b+c}{b-c} \\ z &= \frac{c+a}{c-a} \end{aligned}$$

Cũng dễ có $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow xy+yz+zx = -1$
Mặt khác,

$$(x+y+z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx) = 2$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài Toán 10 [IMO 2008] Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thoả mãn $abc = 1$ thì

$$\sum \frac{a^2}{(a-1)^2} \geq 1$$

Lời giải 1

Đặt

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{a-1} \\ y &= \frac{b}{b-1} \\ z &= \frac{c}{c-1}\end{aligned}$$

Từ điều kiện $abc = 1$ và biến đổi biểu thức, ta thu được điều kiện sau đây của x, y, z

$$xyz = (x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow xy + yz + xz - x - y - z + 1 = 0$$

Ta cần chứng minh

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x + y + z - 1)^2 \geq 0$$

Một điều hiển nhiên đúng.

Lời giải 2

Từ $abc = 1$ ta có thể đổi ẩn $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{x^2}{yz}, \frac{y^2}{xz}, \frac{z^2}{xy}\right)$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sum \frac{a^4}{(a^2 - bc)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho vế phải ta đi chứng minh rằng

$$\begin{aligned}(\sum a^2)^2 &\geq \sum (a^2 - bc)^2 \\ \Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 3

Đổi biến $(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{z}\right)$

Bất đẳng thức cần chứng minh lúc này là

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{(x-y)^2} \geq 1$$

Đặt

$$\begin{aligned}u &= \frac{x+y}{x-y} \\ v &= \frac{y+z}{y-z} \\ t &= \frac{z+x}{z-x}\end{aligned}$$

Dễ có $(u+1)(v+1)(t+1) = (u-1)(v-1)(t-1)$ nên $uv + vt + tu = -1$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}\sum \frac{(u+1)^2}{4} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow u^2 + v^2 + t^2 + 2(u+v+t) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow (u+v+t+1)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Hoàn tất chứng minh.

Bài Toán 11 Cho a, b, c là các số thực khác 1 thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng nếu $\sum \frac{1}{a-1} \leq 0$ thì

$$\sum \frac{1}{1-a} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a-1}$ và tương tự cho y, z .

Ta có $x + y + z \leq 0$ và $a = \frac{x+1}{x}$. Điều phải chứng minh tương đương $x + y + z \leq \frac{-3}{2}$

Từ $ab + bc + ca = 3$ ta thu được $2xy + 2yz + 2zx + x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 + x + y + z = x^2 + y^2 + z^2$

Từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}$ và đặt $p = x + y + z$ ta dễ có

$$p^2 + p \geq \frac{p^2}{3} \Leftrightarrow p(2p + 3) \geq 0$$

Với chú ý rằng $p \leq 0$ và $p \neq 0$ ta thu được $p \leq \frac{-3}{2}$

Đây là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = -1$

Bài Toán 12 Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{a^2b^2 + 1}{(a-b)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Giống như bài toán 9, ta chú ý

$$(ab - 1)^2 + (ab + 1)^2 = 2(a^2b^2 + 1)$$

Đặt $x = \frac{ab-1}{a-b}, u = \frac{ab+1}{a-b}$ và tương tự cho y, z, v, t

Bằng biến đổi đại số dễ dàng thu được $xy + yz + zx = -1, uv + vt + tu = 1$

Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2$$

$$u^2 + v^2 + t^2 \geq uv + vt + tu = 1$$

Như vậy $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 + t^2 \geq 3$

Bất đẳng thức trên tương đương với điều phải chứng minh.

Bài Toán 13 Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sum \sqrt{a+b} \geq 2\sqrt{a+b+c}$$

Bài toán trên có khá nhiều cách giải. Sau đây tác giả trình bày 3 cách thông dụng và sơ cấp.

Lời giải 1

Đặt $x = \sqrt{a+b}, y = \sqrt{b+c}, z = \sqrt{c+a}$ ta có

$$a = x^2 + z^2 - y^2 \geq 0$$

$$b = x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

$$c = y^2 + z^2 - x^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cần chứng minh lúc này là

$$x + y + z \geq \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Ta phải chứng minh

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + z^2 \leq 2yz + 2xz$$

Mặt khác $(y + z)^2 \geq y^2 + z^2 = c + z^2 \geq z^2 \Leftrightarrow y + z \geq x \Leftrightarrow z \geq x - y \Leftrightarrow z^2 \geq (x - y)^2$

Vậy ta chỉ cần chỉ ra $z^2 \leq yz + xz \Leftrightarrow z(x + y - z) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) \sim (t, 0, 0), \forall t \geq 0$

Lời giải 2

Bình phương 2 vế và biến đổi, ta có

$$2 \sum a + 2 \sum \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq 4 \sum a$$

$$\Leftrightarrow \sum \sqrt{a(a+b+c)+bc} \geq a+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ liên tiếp 2 lần rõ ràng

$$L.H.S \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + ab + bc + ca} \geq a+b+c = R.H.S$$

Chứng minh hoàn tất.

Lời giải 3

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Biến đổi điều phải chứng minh về

$$\frac{-c}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a+b+c}} + \frac{-b}{\sqrt{a+c} + \sqrt{a+b+c}} + \sqrt{b+c} \geq 0$$

Có $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a+c} \geq \sqrt{b+c}$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh sẽ đúng nếu ta chỉ ra

$$\frac{b+c}{\sqrt{b+c} + \sqrt{a+b+c}} \leq \sqrt{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{a+b+c} \geq 0$$

Một điều hiển nhiên đúng.

Bài Toán 14 [VQBC] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\prod (a^2 - a + 1) \geq 1$$

Lời giải

Ta thấy hệ số -1 của a gây nhiều khó khăn trong đánh giá vì vậy ta tìm cách loại bỏ nó đi. Thật vậy, viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\prod [(2a-1)^2 + 3] \geq 64$$

Nếu trong 3 số a, b, c có 1 số bé hơn hoặc bằng 0,5, giả sử là c , ta có thể dễ dàng xử lí như sau.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$[(2a-1)^2 + 3] [3 + (2b-1)^2] \geq [\sqrt{3}(2a-1) + \sqrt{3}(2b-1)]^2 = 12(a+b-1)^2 = 12(2-c)^2 \geq 12(2-\frac{1}{2})^2 = 27$$

Mặt khác $(2c-1)^2 + 3 \geq 3$ nên $\prod [(2a-1)^2 + 3] \geq 27 \cdot 3 = 81 > 64$

Nếu cả $a, b, c > 0,5$ đặt

$$x = 2a - 1 > 0$$

$$y = 2b - 1 > 0$$

$$z = 2c - 1 > 0$$

khi đó $x + y + z = 2(a + b + c) - 3 = 3$.

Lúc này ta phải chỉ ra $\prod(x^2 + 3) \geq 64$ (1)

Bất đẳng thức (1) không hề khó. Sau đây là lời giải đề nghị của tác giả.

Đặt $f(x, y, z) = \prod(x^2 + 3)$

Ta sẽ chứng minh 2 bước $f(x, y, z) \geq f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) \geq 64$

Trước hết ta chứng minh rằng $f(x, y, z) \geq f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$

Thật vậy, xét

$$A = f(x, y, z) - f\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = \frac{1}{16}(x^3 + 3) [16y^2z^2 + 48(y^2 + z^2) - (y+z)^4 - 24(y+z)^2]$$

$$A = \frac{1}{16}(x^2 + 3)(y-z)^2(24 - y^2 - 6yz - z^2) \geq \frac{1}{16}(x^2 + 3)(y-z)^2 [24 - 2(x+y+z)^2] \geq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối đúng, ta hoàn tất bước 1.

Bước 2 gần như chỉ mang tính lý thuyết. Theo định lý S.M.V thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $y = z$ tức là $x = 3 - 2y$. Thay thế và biến đổi ta có

$$B = f(x, y, y) - 64 = 4(y-1)^2(y^4 - y^3 + 6y^2 - 5y + 11)$$

Dễ dàng chỉ ra được $y^4 + 6y^2 + 11 \geq y^3 + 5y, \forall y \geq 0$ nên $B \geq 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài Toán 15

Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

$$8^x + 8^y + 8^z + 6 \geq \frac{9(4^x + 4^y + 4^z)}{2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}}$$

Lời giải

Đối với các bài toán đặc trưng có biến ở mũ, ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM mở rộng và Bernoulli, tuy nhiên sơ cấp hoá lời giải vẫn luôn là lựa chọn hàng đầu! Đặt ẩn phụ chính là một trong các phương pháp nhằm thực hiện điều này. Và lời giải sau đây thể hiện đúng tư tưởng ấy!

Lời giải

Đặt

$$a = 2^x > 0$$

$$b = 2^y > 0$$

$$c = 2^z > 0$$

Khi đó ta có $abc = 2^{x+y+z} = 1$ và bất đẳng thức được viết lại

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Sau khi thuần nhất với điều kiện $abc = 1$ ta sẽ chỉ ra

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 6 \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}$$

Bất đẳng thức trên có thể được giải một cách khá đơn giản. Thật vậy, điều phải chứng minh tương đương với

$$\sum \frac{a^2}{bc} - 3 \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} - 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{ab+ca+ca}$$

Loại bỏ nghiệm tầm thường ta phải chứng minh

$$\frac{a+b+c}{abc} \geq \frac{9}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

Bất đẳng thức cuối cùng vô cùng quen thuộc, vì vậy hoàn tất lời giải xin dành cho bạn đọc.

Kết thúc chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$

Nhận xét

Theo kinh nghiệm của tác giả, thì các bài toán với biến chạy tại mũ thường không chặt, tuy nhiên việc có mũ khiến cho nhiều học sinh hoang mang, lúng túng. Việc đặt ẩn phụ hầu hết sẽ cho ra một bất đẳng thức khá lỏng, dễ dàng đánh giá bằng các phương pháp thông thường.

4 Bài tập tự luyện

Để kết thúc chuyên đề, mời các bạn giải các bài toán sau để luyện tập.

Bài 1 Cho các số thực x, y thỏa mãn $21x^2 - 36xy + 44y^2 \leq 27$. Chứng minh rằng $x + 2y \geq -3$

Bài 2 Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ thỏa $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \prod \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \right)$$

Bài 3 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{(2a-1)^2}{(a-2)^2} \geq \frac{17}{4}$$

Bài 4 Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{(a-b)^2} + \frac{2c^2}{(b-c)^2(c-a)^2} + \frac{2c^2}{(b-c)^2} + \frac{2a^2}{(c-a)^2} \geq 2$$

Bài 5 [Số 463-THTT] Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x) = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{\sqrt{xy} + 1} \geq \sqrt{3}$$

Bài 6 [IMO SL 2009-A2] Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $\sum x = \sum \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{1}{(2xy + yz + xz)^2} \leq \frac{3}{16x^2y^2z^2}$$

Bài 7 Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{1}{(2x + y + z)^2} \leq \frac{3}{16}$$

Bài 8 [Trường Đông 2015] Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{5}{4} \geq \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

Bài 9 [IMO SL 2006-A5] Cho a, b, c là số đo 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} \leq 3$$

Bài 10 [VMO 2002] Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$12ab + 27c \leq 6a^2 + 10\sqrt{(a^2 - 2b)^3}$$

Bài 11 [Gabriel Dospinescu] Giả sử $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ sao cho $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$\sum \sqrt{a+1} \geq \sqrt{ab+bc+ca+15}$$

5 Tham khảo

Tài liệu

- [1] Diễn đàn Toán học : <http://diendantoanhoc.net>
- [2] Diễn đàn AoPS : <http://artofproblemsolving.com>
- [3] Báo Toán Học và Tuổi trẻ : Số 463