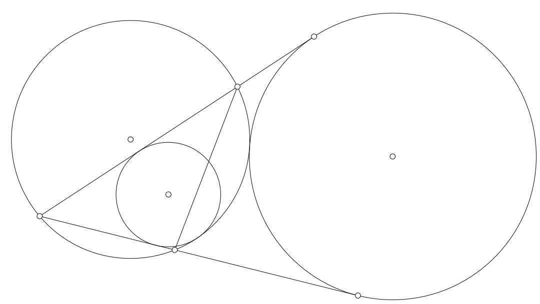
Đường tròn mixtilinear

Nguyễn Văn Linh

Sinh viên K50 TCNH ĐH Ngoại thương

1 Giới thiệu

Đường tròn mixtilinear nội tiếp (bàng tiếp) là đường tròn tiếp xúc với hai cạnh tam giác và tiếp xúc trong (ngoài) với đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Đường tròn mixtilinear là một vấn đề khá kinh điển trong hình học phẳng, nó bắt đầu được nghiên cứu bởi người Nhật Bản ngay từ thế kỷ XVII, trong các bài toán được khắc trên những ngôi đền cổ (xem [1]). Cách định nghĩa rất đặc biệt của đường tròn này tạo ra nhiều điều thú vị ẩn chứa bên trong. Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của đường tròn mixtilinear và đường tròn Thebault (đường tròn mixtilinear mở rộng).

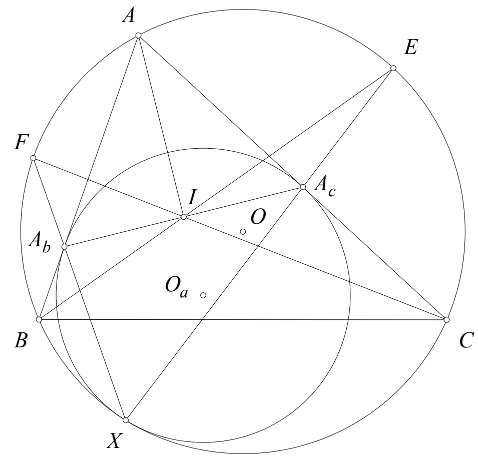


2 Tính chất

Trong mục này chủ yếu chúng ta sẽ tìm hiểu các tính chất liên quan đến đường tròn mixtilinear nội tiếp. Thực tế hầu hết những tính chất đúng với nội tiếp thì cũng đúng với bàng tiếp.

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Kí hiệu $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ (với tâm tương ứng là O_a, O_b, O_c) lần lượt là các đường tròn mixtilinear nội tiếp ứng với góc A, B, C; X, Y, Z lần lượt là tiếp điểm của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ với (O); A_b, A_c lần lượt là tiếp điểm của ω_a với AB, AC. Tương tự ta xác định B_a, B_c, C_a, C_b; D, E, F lần lượt là điểm chính giữa các cung BC, CA, AB.

Tính chất 2.1. (Bổ đề Sawayama-Thebault). I là trung điểm của A_bA_c.



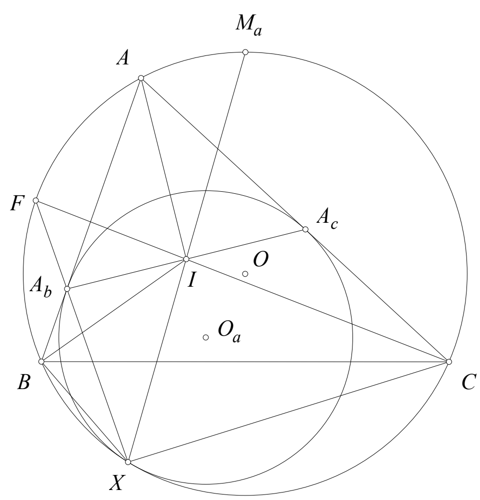
Chứng minh. Hiển nhiên E, F lần lượt là giao điểm của XA_c, XA_b với (O). Suy ra BE giao CF tại I.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $AFBXCE$ ta có $(AB \cap XF), (AC \cap XE), (BE \cap CF)$ thẳng hàng hay A_b, I, A_c thẳng hàng.

Mặt khác tam giác AA_bA_c cân tại A có AI là phân giác $\angle A_bAA_c$ nên I là trung điểm A_bA_c. □

Nhận xét. Xem cách giải khác tại [2]. Ngoài ra tính chất 2.1 còn là hệ quả của tính chất 3.1.

Tính chất 2.2. XI đi qua điểm chính giữa cung BAC.

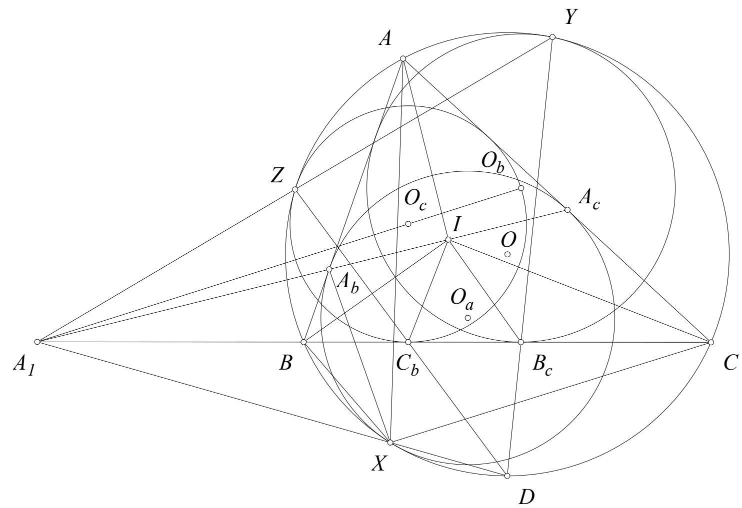


Chứng minh. Do XA_b giao CI tại F nằm trên (O) nên $\angle BXA_b = \angle FCB = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle BIA - 90^\circ = \angle A_bIB$.

Suy ra tứ giác A_bIXB nội tiếp. Tương tự tứ giác A_cIXC nội tiếp.

Ta thu được $\angle BXI = \angle AA_bI = \angle AA_cI = \angle IXC$, suy ra XI là phân giác $\angle BXC$ hay XI đi qua điểm chính giữa M_a của cung BAC. □

Tính chất 2.3. $A_bA_c, BC, XD, O_bO_c, YZ$ đồng quy tại A_1.



Chứng minh. Gọi A_1 là giao của A_bA_c với BC.

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{A_cA}{A_cC}.\dfrac{A_bB}{A_bA} = \dfrac{A_bB}{A_cC}$.

Do XA_b, XA_c lần lượt là phân giác $\angle BXA$ và $\angle CXA$ nên $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{BX}{AX}.\dfrac{AX}{CX} = \dfrac{BA_b}{AA_b}.\dfrac{AA_c}{CA_c} = \dfrac{BA_b}{CA_c}$.

Từ đó $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{BA_b}{CA_c} = \dfrac{BX}{CX}$, hay XA_1 là phân giác ngoài $\angle BXC$, tức là XA_1 đi qua D.

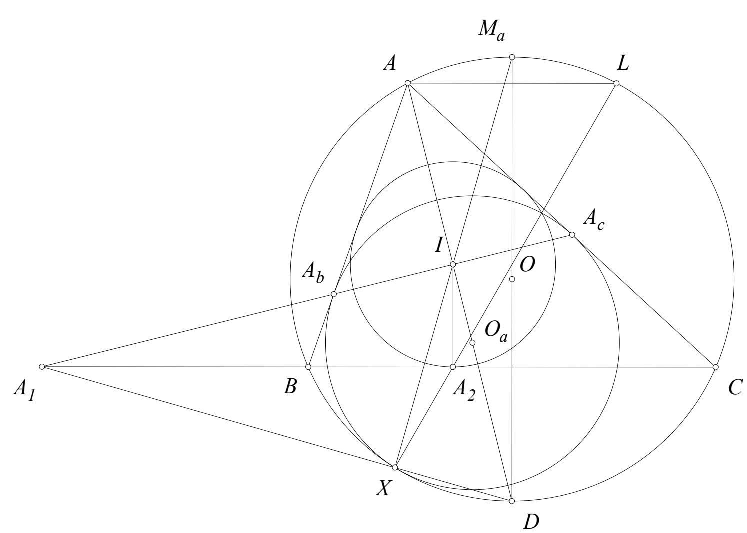
Mặt khác, dễ dàng nhận thấy ZC_b giao YB_c tại D và $DC_b.DZ = DB^2 = DB_c.DY$ nên tứ giác ZYB_cC_b nội tiếp.

Do $A_1I \perp AI, C_bI \perp CI$ nên $\angle A_1IC_b = 180^\circ - \angle AIC = 90^\circ - \angle IBC = \angle IB_cB$.

Lại có A_1 nằm trên trục đẳng phương của đường tròn $(I, 0)$ và (O) (xem [3]) nên ta thu được $A_1B.A_1C = A_1I^2 = A_1C_b.A_1B_c$. Suy ra A_1 thuộc trục đẳng phương của (ZYB_cC_b) và (O). Tức là $A_1 \in YZ$.

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $\omega_b, \omega_c, (O)$ suy ra A_1 là tâm vị tự ngoài của ω_b và ω_c, tức là A_1, O_b, O_c thẳng hàng. □

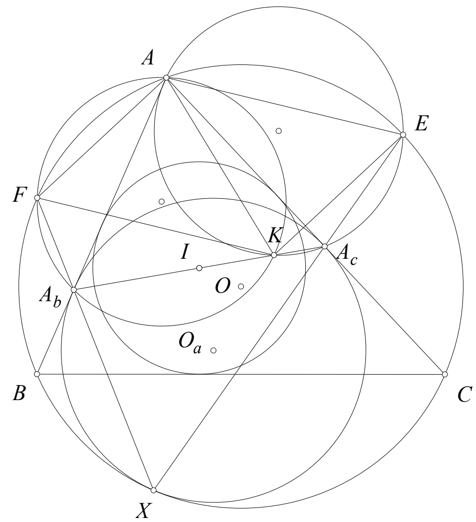
Tính chất 2.4. Gọi A_2 là tiếp điểm của (I) với BC. XA_2 giao (O) tại L. Khi đó $AL \parallel BC$.



Chứng minh. Theo tính chất 2.2 ta có XI đi qua điểm chính giữa M_a của cung BAC nên $\angle IXD = 90^\circ$.

Lại theo tính chất 2.3, DX, A_bA_c, BC đồng quy tại A_1 nên tứ giác A_1IA_2X nội tiếp đường tròn đường kính IA_1. Suy ra $\angle LA_2C = \angle A_1IX = \angle A_1DX = \angle ALA_2$. Từ đó $AL \parallel BC$. □

Tính chất 2.5. (AFA_b) giao (AEA_c) tại K. Khi đó $AEKF$ là hình bình hành.



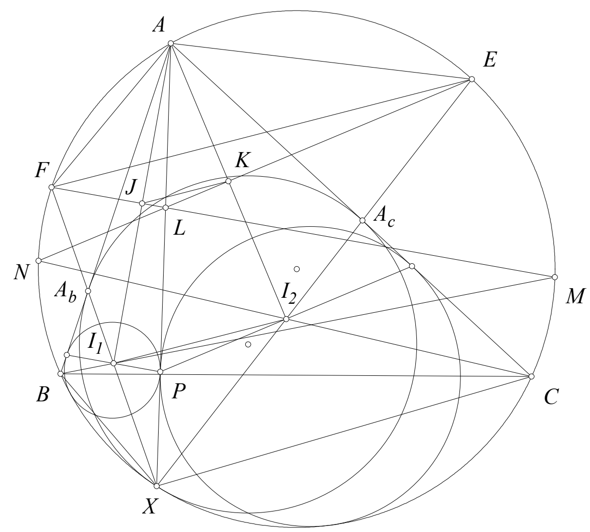
Chứng minh. Ta có $(KA, KA_b) \equiv (FA, FA_b) \equiv (FA, FX) \equiv (EA, EX) \equiv (EA, EA_c) \equiv (KA, KA_c)$ $(\bmod\ \pi)$.

Suy ra $K \in A_bA_c$.

Từ đó $\angle FAK = \angle XA_bA_c = \angle AA_cE = \angle AKE$, suy ra $AF \parallel KE$. Tương tự, $AE \parallel KF$ hay $AEKF$ là hình bình hành. □

Tính chất 2.6. Đường tròn mixtilinear nội tiếp ứng với góc A của các tam giác ABX và ACX tiếp xúc nhau.

Chứng minh. Cách 1 (Jean Louis Ayme). (xem [7])



Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABX, ACX; M, N lần lượt là giao của BI_1, CI_2 với (O). Các đường thẳng qua I_1 và vuông góc với AI_1, qua I_2 và vuông góc với AI_2 giao nhau tại P. MF giao NE tại L, MF giao AI_1 tại J, NE giao AI_2 tại K.

Ta có $FA = FI_1, MA = MI_1$ nên FM là trung trực đoạn thẳng AI_1, suy ra $FM \perp AI_1$ hay $FM \parallel I_1P$, tương tự, $EN \parallel I_2P$.

Mặt khác, gọi T là giao của AX với ω_a.

Ta có XA_bTA_c là tứ giác điều hòa và $XFAE$ là ảnh của XA_bTA_c qua phép vị tự tâm X nên $XFAE$ là tứ giác điều hòa.

Suy ra $\dfrac{FI_1}{FX} = \dfrac{FA}{FX} = \dfrac{EA}{EX} = \dfrac{EI_2}{EX}$. Từ đó $EF \parallel I_1I_2$.

Hai tam giác FLE và I_1PI_2 có cạnh tương ứng song song nên FI_1, EI_2, LP giao nhau tại tâm vị tự X của hai tam giác, hay X, P, L thẳng hàng.

Lại có JK là đường trung bình của tam giác AI_1I_2 nên $JK \parallel I_1I_2$. Hai tam giác JLK và I_1PI_2 có cạnh tương ứng song song nên I_1J, I_2K, LP giao nhau tại tâm vị tự A của hai tam giác, hay A, L, P thẳng hàng.

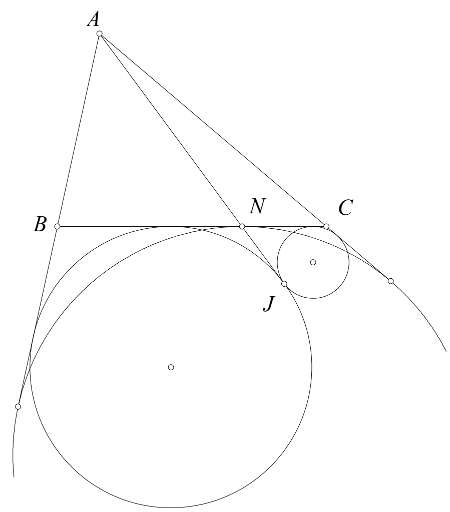
Vậy A, P, X thẳng hàng, suy ra đpcm.

Cách 2.

Xét phép nghịch đảo cực A phương tích k bất kì I_A^k: $B \mapsto B', C \mapsto C', (O) \mapsto B'C', BC \mapsto (AB'C'), \omega_a \mapsto \omega'_a$.

Do ω_a tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC nên ω'_a là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác $AB'C'$.

Bài toán được đưa về dạng: Cho tam giác ABC, N là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC. Chứng minh rằng đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ANB và ANC tiếp xúc nhau.

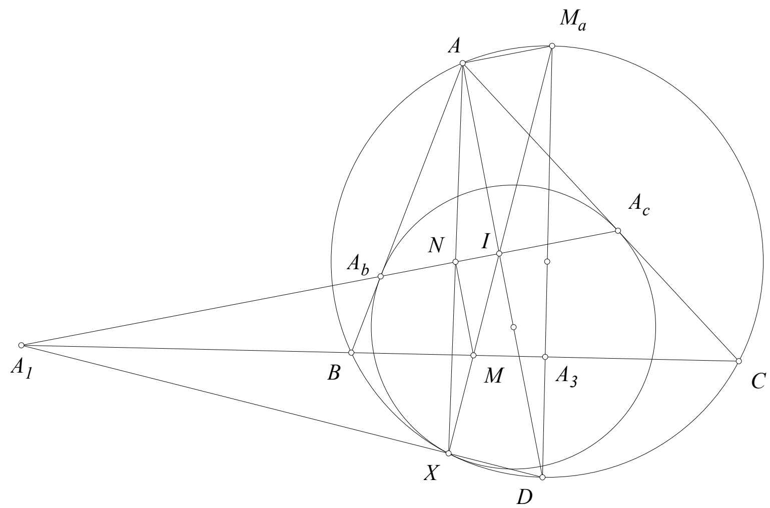


Ta biết rằng AN là đường thẳng chia tam giác ABC thành hai tam giác có chu vi bằng nhau.

Gọi J, J' lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ANB, ANC với AN.

Kí hiệu $p(XYZ)$ là nửa chu vi tam giác XYZ, ta có $AJ = p(ANB) = p(ANC) = AJ'$. Do đó $J \equiv J'$, hay hai đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ANB và ANC tiếp xúc nhau tại J. Ta có đpcm. $\square$

Tính chất 2.7. IX giao BC tại M, AX giao A_bA_c tại N, khi đó $MN \parallel AI$ và (XNI) tiếp xúc với (O).



Chứng minh. Gọi A_3 là trung điểm BC. Ta có tứ giác A_1IA_3D nội tiếp đường tròn đường kính A_1D. Suy ra $\angle AXI = \angle IDA_3 = \angle IA_1A_3$. Từ đó tứ giác A_1NMX nội tiếp.

Suy ra $\angle A_1NM = \angle A_1XM = 90°$. Vậy $MN \parallel AI$.

Mặt khác, do AM_a và NI cùng vuông góc với AI nên hai tam giác XNI và XAM_a có tâm vị tự X. Suy ra (XNI) tiếp xúc với (XAM_a). □

Tính chất 2.8. AX, BY, CZ đồng quy tại tâm vị tự ngoài của (O) và (I).

Lời giải cho tính chất này bạn đọc xem tại [4].

Tính chất 2.9. (AIX) trực giao với (O).

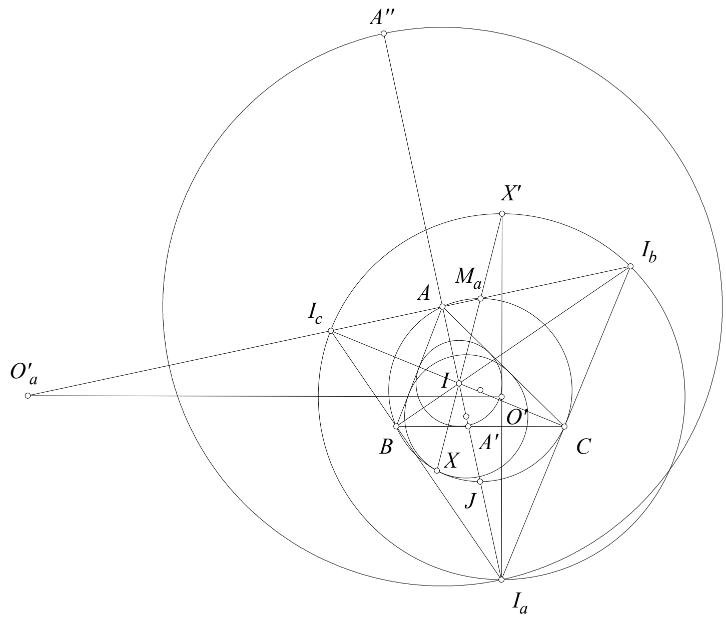
Chứng minh. Ta có $\angle OAD = \angle ODA = \angle AXI$, do đó OA là tiếp tuyến của (AIX). Suy ra đpcm. □

Tính chất 2.10. Các đường tròn $(AIX), (BIY), (CIZ)$ đồng trục.

Chứng minh. Theo tính chất 2.9, phương tích từ O đến 3 đường tròn này đều bằng R^2, lại có 3 đường tròn cùng đi qua I nên OI là trục đẳng phương của 3 đường tròn.

Ta cũng có thể chứng minh dựa vào tính chất 2.8, dễ dàng suy ra tâm vị tự ngoài của (O) và (I) cũng có cùng phương tích với 3 đường tròn. □

Tính chất 2.11. Gọi A', B', C' lần lượt là giao của AI, BI, CI với BC, CA, AB. Khi đó các đường tròn $(AXA'), (BXB'), (CXC')$ đồng trục.



Chứng minh. Gọi I_a, I_b, I_c là 3 tâm bàng tiếp của tam giác ABC. Khi đó I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$.

Xét phép nghịch đảo cực I phương tích $k = \overline{IA}.\overline{II_a}$:

$A \mapsto I_a, X \mapsto X', A' \mapsto A''$. Tương tự xác định Y', Z', B'', C''.

Gọi J là trung điểm II_a. Ta đã chứng minh được XX' đi qua điểm chính giữa M_a của cung BAC và phép vị tự tâm I tỉ số 2 biến đường tròn (O) thành $(I_aI_bI_c)$.

Suy ra $\overline{IX}.\overline{IX'} = \overline{IA}.\overline{II_a} = 2\overline{IA}.\overline{IJ} = \overline{IX}.2\overline{IM_a}$.

Suy ra M_a là trung điểm IX', tức là $X' \in (I_aI_bI_c)$. Do X' đối xứng với trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$ qua trung điểm I_bI_c nên X' đối xứng với I_a qua tâm ngoại tiếp O' của tam giác $I_aI_bI_c$.

Qua phép nghịch đảo $I_I^k : B \mapsto I_b, C \mapsto I_c$ nên $BC \mapsto (II_bI_c)$. Suy ra $A'' \in (II_bI_c)$, từ đó A'' là điểm đối xứng với I_a qua I_bI_c.

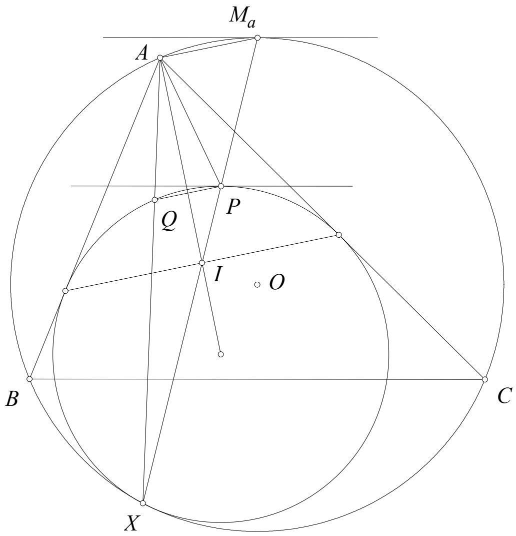
Như vậy tâm của $(I_aX'A'')$ là giao của đường thẳng qua O' và vuông góc với I_aO' với I_bI_c.

Ta chú ý tới kết quả sau: *Cho tam giác ABC và một điểm X bất kì. Đường thẳng qua X và vuông góc với AX giao BC tại A'. Tương tự xác định B', C'. Khi đó A', B', C' thẳng hàng.* (lời giải xem tại [3]).

Áp dụng vào bài toán này cho tam giác $I_aI_bI_c$ và điểm O' suy ra tâm của các đường tròn $(I_aX'A''), (I_bY'B''), (I_cZ'C'')$ thẳng hàng.

Mặt khác hiển nhiên phương tích từ O' đến 3 đường tròn này bằng nhau. Do đó $(I_aX'A''), (I_bY'B'')$, $(I_cZ'C'')$ đồng trục, suy ra $(AXA'), (BXB'), (CXC')$ đồng trục. □

Tính chất 2.12. Gọi l là tiếp tuyến của ω_a sao cho l nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A đồng thời $l \parallel BC$. Gọi P là tiếp điểm của l với ω_a. Khi đó AX, AP là hai đường đẳng giác trong góc BAC.



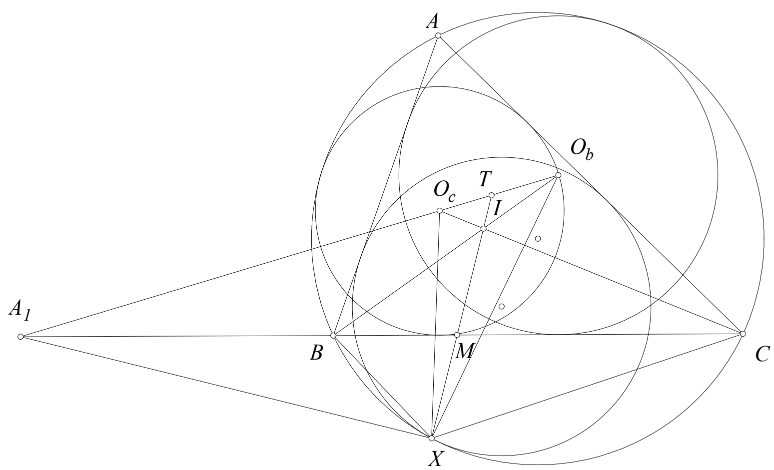
Chứng minh. Gọi Q là giao điểm thứ hai của AX với ω_a.

Do XI giao (O) tại điểm chính giữa M_a của cung BAC và tiếp tuyến của (O) tại M_a song song với BC nên P là ảnh của M_a qua phép vị tự tâm X. Từ đó X, I, P thẳng hàng.

Ta có $IA \perp AM_a, PQ$ là ảnh của AM_a qua phép vị tự tâm X nên $PQ \parallel AM_a$, suy ra $PQ \perp AI$.

Như vậy P và Q đối xứng nhau qua AI, hay AX và AP là hai đường đẳng giác trong $\angle BAC$. □

Tính chất 2.13. XO_a, XO_b là hai đường đẳng giác trong góc BXC.



Chứng minh. Gọi M là giao của IX với BC, T là giao của IX với O_bO_c.

Ta có XA_1 và XM lần lượt là phân giác ngoài và trong góc BXC nên $(BCMA_1) = -1$.

Suy ra $I(BCMA_1) = -1$, hay $I(O_bO_cTA_1) = -1$, nghĩa là $(O_bO_cTA_1) = -1$.

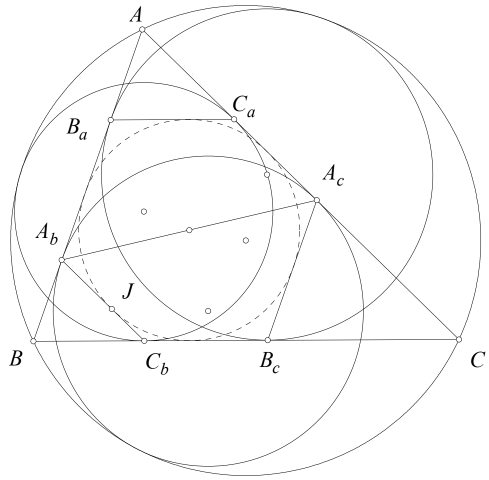
Vậy $X(O_bO_cTA_1) = -1$. Ta lại có $\angle IXA_1 = 90^\circ$ nên XI là phân giác $\angle O_bXO_c$.

Theo tính chất 2.2, XI là phân giác $\angle BXC$ nên ta có đpcm. □

Nhận xét. Tính chất 2.13 có thể tổng quát: Cho AB là một dây cung bất kì của đường tròn (O). Hai đường tròn $(X), (Y)$ nằm cùng phía với (O) sao cho chúng cùng tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với AB lần lượt tại C, D. H là giao điểm của XY và AB, M là điểm chính giữa cung AB không chứa $(X), (Y)$. HM cắt (O) lần thứ hai tại I, khi đó IX, IY là hai đường đẳng giác trong góc AIB.

Lời giải cho bài toán tổng quát, xem [6].

Tính chất 2.14. $B_aA_bC_bB_cA_cC_a$ là lục giác ngoại tiếp đường tròn (I).



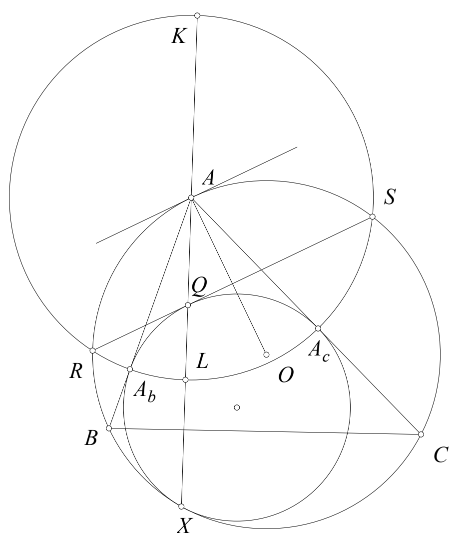
Chứng minh. Kẻ tiếp tuyến A_bJ tới (I). Ta có $\angle JA_bA_c = \angle AA_bA_c = \angle AA_cA_b$ nên $A_bJ \parallel AC$.

Như vậy tiếp tuyến kẻ từ A_b tới (I) song song với AC, tương tự suy ra A_bC_b là tiếp tuyến song song với AC của (I).

Chứng minh tương tự ta có đpcm. □

Tính chất 2.15. Đường tròn (A, AA_b) giao (O) tại hai điểm R, S. Khi đó RS là tiếp tuyến của ω_a.

Chứng minh. Cách 1.



Gọi Q là giao của AX với ω_a, K, L lần lượt là giao của AX với (A, AA_b).

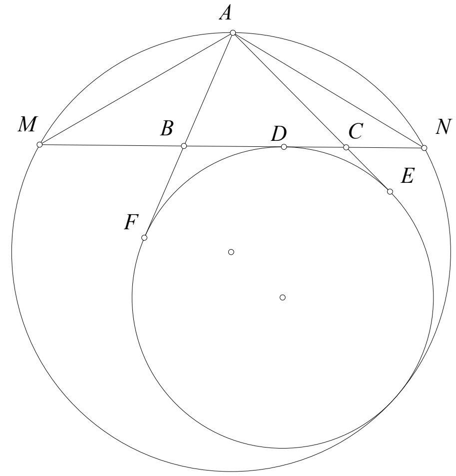
Do hai đường tròn (A, AA_b) và ω_a trực giao nên $(KLQX) = -1$. Mà A là trung điểm KL nên theo định lý Maclaurin, $QK.QL = QA.QX$, hay Q thuộc trục đẳng phương của (A, AA_b) và (O). Nghĩa là $Q \in RS$.

Ta có X là tâm vị tự của hai đường tròn ω_a và (O) nên tiếp tuyến tại A của (O) và tiếp tuyến tại Q của ω_a song song với nhau. Mà tiếp tuyến tại A của (O) và RS cùng vuông góc với OA nên RS là tiếp tuyến của ω_a.

Cách 2.

Xét phép nghịch đảo cực A phương tích bất kì, ta chuyển được bài toán về dạng mới như sau:

Cho tam giác ABC, đường tròn ω bàng tiếp góc A tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại F, E. Đường tròn (A, AE) giao BC tại hai điểm M, N. Khi đó (AMN) tiếp xúc với ω.

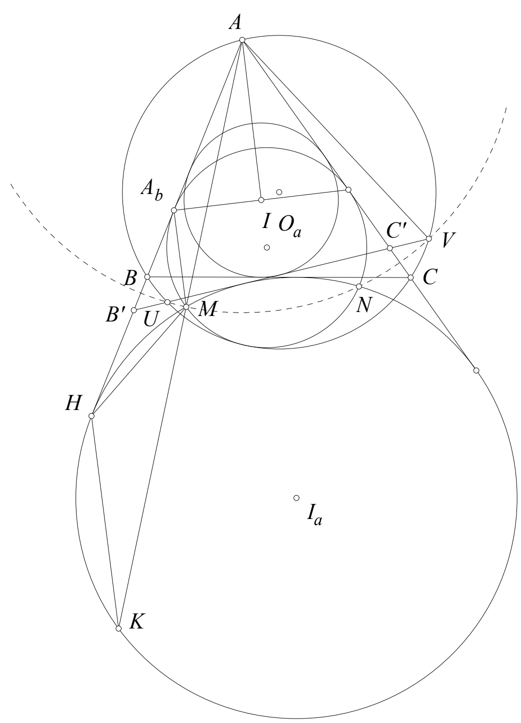


Chứng minh.

Gọi D là tiếp điểm của ω với BC. Áp dụng định lý Casey cho 4 đường tròn $(A,0),(M,0),(N,0),\omega$ ta có (AMN) tiếp xúc với ω khi và chỉ khi $AM.ND + AN.MD = AF.MN$ (xem [2]).

Nhưng $AM = AN = AF$ nên điều này tương đương $ND + MD = MN$, hiển nhiên đúng. Ta có đpcm. □

Tính chất 2.16. Gọi M, N là giao điểm của (I_a) và ω_a. Đường tròn (A, AM) giao (O) tại U, V. Khi đó UV là tiếp tuyến chung của (I) và (I_a).



Chứng minh. Gọi H là tiếp điểm của (I_a) với AB. Xét phép nghịch đảo cực A phương tích $k = \overline{AA_b}.\overline{AH}$:

$B \mapsto B', C \mapsto C', (O_a) \mapsto (I_a), (I_a) \mapsto (O_a), (O) \mapsto B'C', BC \mapsto (AB'C')$.

Gọi L là giao điểm thứ hai của AM với (I_a).

Ta có $\angle A_bMA = \angle HKA = \angle AHM$, suy ra $AN^2 = AM^2 = \overline{AA_b}.\overline{AH}$.

Như vậy đường tròn (A, AM) không thay đổi qua phép nghịch đảo I_A^k.

Do U, V là giao điểm của (A, AM) với (O) nên U, V là hai điểm không thay đổi qua phép nghịch đảo I_A^k, tức là $U, V \in B'C'$.

Ta có (O_a) tiếp xúc với (O) nên (I_a) tiếp xúc với $B'C'$, tức (I_a) tiếp xúc với UV.

Mặt khác, $AA_b.AH = \dfrac{AI}{\cos A/2}.p = \dfrac{rp}{\sin A/2.\cos A/2} = \dfrac{2S_{ABC}}{\sin A} = bc = AB.AB' = AC.AC'$.

Suy ra $AB' = AC, AC' = AB$. Mà BC là tiếp tuyến chung của (I) và (I_a) nên qua phép đối xứng trục, $B'C'$ là tiếp tuyến chung thứ hai của hai đường tròn này. □

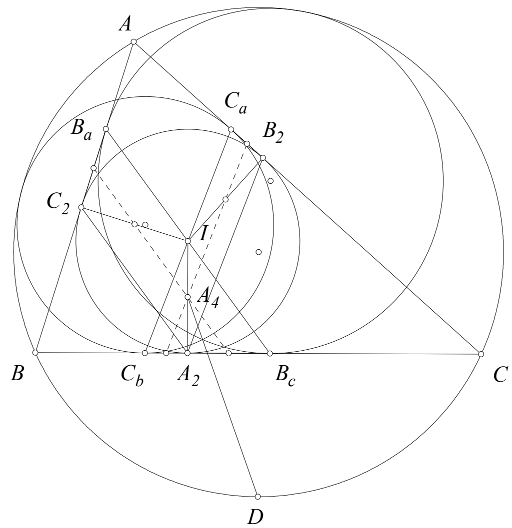
Nhận xét.

1. Từ tính chất trên suy ra ảnh của (I) qua phép nghịch đảo I_A^k chính là đường tròn mixtilinear bàng tiếp.

2. Một cách tương tự ta cũng có kết quả sau:

Gọi M', N' là giao điểm của (I) và ω_a. Đường tròn (A, AM') giao (O) tại U', V'. Khi đó $U'V'$ là tiếp tuyến của (I). Ngoài ra có thể chứng minh I nằm trên (A, AM').

Tính chất 2.17. Gọi A_2 là tiếp điểm của (I) với BC, A_4 là trung điểm IA_2. Khi đó A_4D là trục đẳng phương của ω_b và ω_c.



Chứng minh. Theo lời giải tính chất 2.3 chúng ta đã chứng minh được D nằm trên trục đẳng phương của ω_b và ω_c.

Gọi B_2, C_2 lần lượt là tiếp điểm của (I) với AC, AB. Xét hai đường tròn (I) và ω_b có C_2B_a và A_2B_c là hai tiếp tuyến chung ngoài. Do đó đường thẳng nối trung điểm C_2B_a và A_2B_c hay đường trung bình l_1 của hình thang $C_2B_aB_cA_2$ chính là trục đẳng phương của (I) và ω_b. Hiển nhiên l_1 đi qua A_4.

Tương tự, đường trung bình l_2 của hình thang $C_aB_2A_2C_b$ là trục đẳng phương của (I) và ω_c. Ta chứng minh được l_1 và l_2 giao nhau tại A_4.

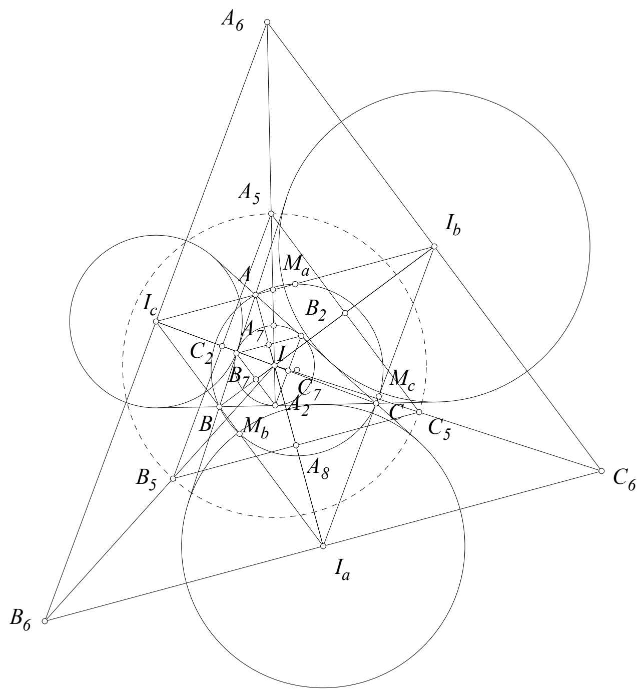
Như vậy A_4 chính là tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(I), \omega_b, \omega_c$. Từ đó A_4D là trục đẳng phương của ω_b và ω_c. □

Tính chất 2.18. Tâm đẳng phương J của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ nằm trên OI và chia OI theo tỉ số $\overline{OJ} : \overline{JI} = 2R : -r$.

Chứng minh. Gọi B_4, C_4 lần lượt là trung điểm IB_2, IC_2.

Dễ dàng chứng minh hai tam giác DEF và $A_4B_4C_4$ có cạnh tương ứng song song nên DA_4, EB_4, FC_4 đồng quy tại tâm vị tự J của hai tam giác, tâm vị tự này cũng chính là tâm vị tự của đường tròn ngoại tiếp hai tam giác DEF và $A_4B_4C_4$. Chú ý rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$ bằng $\dfrac{r}{2}$, vậy $\overline{OJ} : \overline{JI} = 2R : -r$. □

Tính chất 2.19. Tâm đẳng phương của 3 đường tròn mixtilinear ngoại tiếp và tâm đẳng phương của 3 đường tròn mixtilinear nội tiếp đối xứng nhau qua O.



Chứng minh. Gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là điểm chính giữa các cung BAC, ABC, ACB. Một cách tương tự ta cũng chứng minh được M_a, M_b, M_c lần lượt nằm trên trục đẳng phương của từng cặp các đường tròn mixtilinear ngoại tiếp (kí hiệu là $\omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$).

Gọi I_a, I_b, I_c là tâm 3 đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC. A'_b, A'_c là tiếp điểm của ω'_a với AB, AC. Tương tự ta xác định B'_a, B'_c, C'_a, C'_b.

Trục đẳng phương của (I) và ω'_c là đường trung bình của hình thang $A_2B_2C_aC_b$, trục đẳng phương của (I) và ω'_b là đường trung bình của hình thang $A_2C_2B_aB_c$. Hai đường trung bình này giao nhau tại tâm đẳng phương A_5 của 3 đường tròn $(I), \omega'_b, \omega'_c$.

Tương tự ta xác định được B_5, C_5.

Gọi $A_6B_6C_6$ là tam giác tạo bởi giao điểm của các đường thẳng $A'_bA'_c, B'_aB'_c, C'_aC'_b$; $A_7B_7C_7$ là tam giác trung tuyến của tam giác $A_2B_2C_2$.

Do I là trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$ nên dễ dàng thu được I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_6B_6C_6$.

Ta có (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$, $(I_aI_bI_c)$ là đường tròn Euler của tam giác $A_6B_6C_6$ nên $R(A_6B_6C_6) = 4R$.

Hai tam giác $A_6B_6C_6$ và $A_2B_2C_2$ có chung tâm ngoại tiếp I và có cạnh tương ứng song song nên I là tâm vị tự trong của hai tam giác đó. Lại có A_7, I_a lần lượt là trung điểm B_2C_2 và A_6B_6 nên ta thu được $\dfrac{IA_7}{II_a} = \dfrac{R(A_2B_2C_2)}{R(A_6B_6C_6)} = \dfrac{r}{4R}$.

Gọi A_8 là trung điểm I_aA7, tương tự có B_8, C_8.

Suy ra $\dfrac{IA_8}{II_a} = \dfrac{A_7A_8 - A_7I}{II_a} = \dfrac{A_7I_a}{2II_a} - \dfrac{A_7I}{II_a} = \dfrac{4R+r}{8R} - \dfrac{r}{4R} = \dfrac{4R-r}{8R}$.

Do hai tam giác $A_8B_8C_8$ và $I_aI_bI_c$ có tâm vị tự I nên hai tam giác $A_5B_5C_5$ và $A_6B_6C_6$ cũng có tâm vị tự I. Từ đó $R(A_5B_5C_5) = R(A_6B_6C_6).\dfrac{IA_8}{II_a} = 4R.\dfrac{4R-r}{8R} = 2R - \dfrac{r}{2}$.

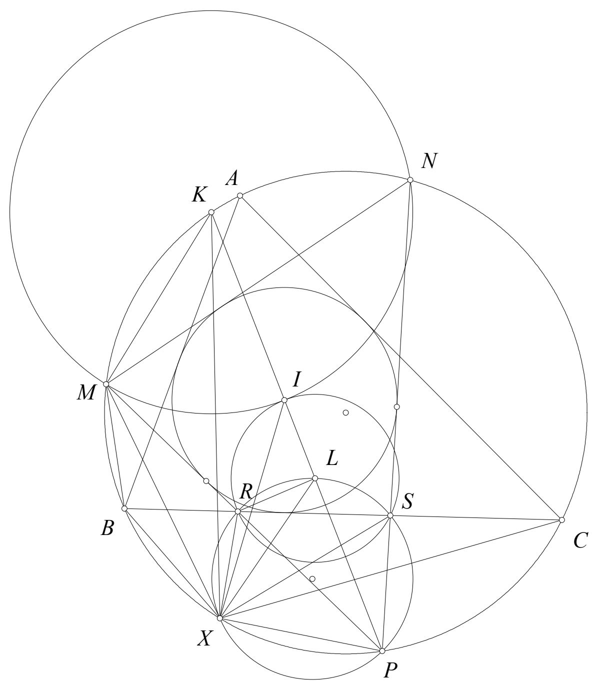
Dễ dàng chứng minh được hai tam giác $M_aM_bM_c$ và $A_5B_5C_5$ có cạnh tương ứng song song nên M_aA_5, M_bB_5, M_cC_5 đồng quy tại tâm vị tự J' của hai tam giác, J' nằm trên đường nối hai tâm ngoại tiếp I, O đồng thời chia IO theo tỉ số $\overline{J'I} : \overline{J'O} = (2R - \frac{r}{2}) : R$. Ta cũng có J' chính là tâm đẳng phương của $\omega'_a, \omega'_b, \omega'_c$.

Kết hợp với tính chất 2.18 suy ra J và J' đối xứng nhau qua O. □

Tính chất 2.20. Tỉ số giữa bán kính của ω_a và ω'_a là α, tương tự có β, γ. Khi đó $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Chứng minh. Theo tính chất 2.1 thì I là trung điểm A_bA_c, I_a là trung điểm A'_b, A'_c. Từ đó α chính là tỉ số giữa bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A. Bài toán đưa về việc chứng minh $\frac{AI}{AI_a} + \frac{BI}{BI_b} + \frac{CI}{CI_c} = 1$, hay $\frac{S_{I_bII_c} + S_{I_aII_c} + S_{I_aII_b}}{S_{I_aI_bI_c}} = 1$, hiển nhiên đúng. □

Tính chất 2.21. (Cosmin Pohoata). P là điểm bất kì chuyển động trên (O). Gọi R, S là giao điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ P tới (I) với BC. Khi đó (PRS) luôn đi qua X.



Chứng minh. Gọi X' là giao của (PRS) với (O). Dựa theo tính chất 2.2 ta chỉ cần chứng minh $X'I$ là phân giác $\angle BX'C$ thì sẽ có $X' \equiv X$.

Gọi M, N là giao của PR, PS với $(O), L, K$ lần lượt là giao của PI với $(PRS), (O)$.

Xét hai tam giác MBX' và CSX' có $\angle BMX' = \angle SCX', \angle MBX' = 180° - \angle X'PR = 180° - \angle RSX' = \angle X'SC$.

Suy ra $\angle BX'M = \angle SX'C$.

Lại có $\angle MX'K = \angle MPK = \angle LPS = \angle LX'S$.

Do đó $X'I$ là phân giác $\angle BX'C$ khi và chỉ khi $X'I$ là phân giác $\angle KX'L$, tương đương $\frac{X'K}{X'L} = \frac{KI}{LI}$. (1)

Do I là tâm bàng tiếp của tam giác PRS và L là điểm chính giữa cung RS nên $LI = LR$.

Theo định lý Poncelet (xem [5]), MN tiếp xúc với (I), suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác MIN hay $KI = KM$.

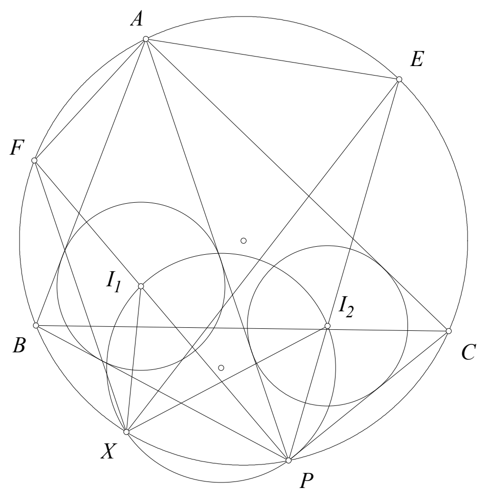
Như vậy $\frac{KI}{LI} = \frac{KM}{LR}$.

Xét hai tam giác KMX' và LRX' có $\angle MX'K = \angle RPL = \angle RX'L$, $\angle MKX' = \angle MPX' = \angle RLX'$. Do đó $\triangle KMX' \sim \triangle LRX'$.

Suy ra $\frac{KM}{LR} = \frac{KX'}{LX'}$, nghĩa là (1) đúng. Ta có đpcm. □

Nhận xét. Bài toán trên có thể được mở rộng như sau: (Vladimir Zajic). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). P là một điểm bất kì nằm ngoài (I). Các tiếp tuyến kẻ từ P tới (I) giao BC tại E, F. PI giao (O) tại P'. Khi đó $(P'EF)$ luôn đi qua tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O).*

Tính chất 2.22. (Iran 1997). P là điểm bất kì chuyển động trên cung BC không chứa A. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác APB, APC. Khi đó (I_1I_2P) luôn đi qua X.



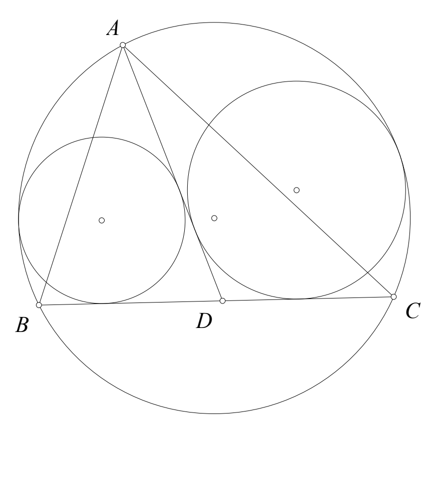
Chứng minh. Hiển nhiên PI_1, PI_2 lần lượt cắt (O) tại F, E và F, E lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABI_1, ACI_2. Gọi X' là giao của (I_1I_2P) với (O).

Ta có $\angle X'FI_1 = \angle X'EI_2, \angle FI_1X' = \angle EI_2X'$, do đó $\triangle FI_1X' \sim \triangle EI_2X'$.

Suy ra $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{FI_1}{EI_2} = \dfrac{X'F}{X'E}$. Từ đó tứ giác $AFX'E$ điều hòa, theo phép chứng minh tính chất 2.6 ta có tứ giác $AFXE$ điều hòa, suy ra $X' \equiv X$. □

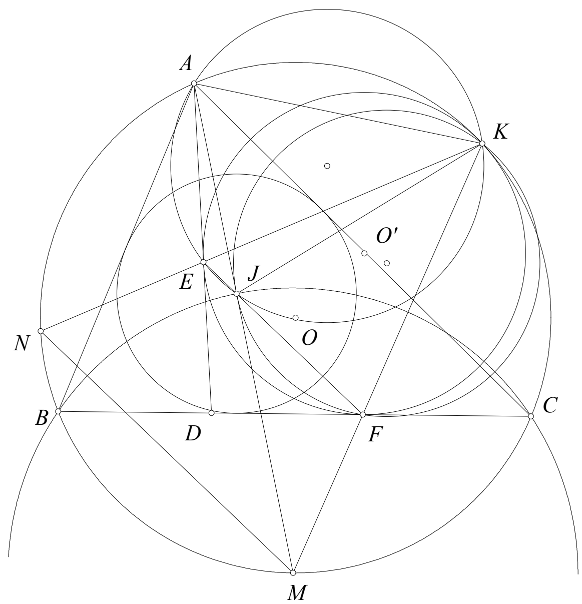
3 Đường tròn Thebault

Đường tròn Thebault được định nghĩa như sau: *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng l qua A cắt cạnh BC tại D. Đường tròn tiếp xúc với các tia DA, DC và tiếp xúc trong với (O) gọi là đường tròn Thebault nội tiếp của tam giác ABC ứng với đường thẳng l và đỉnh C.* Một cách tương tự ta cũng định nghĩa được các đường tròn Thebault nội tiếp còn lại và các đường tròn Thebault bàng tiếp.



Đường tròn Thebault thực chất là dạng mở rộng của đường tròn mixtilinear. Rất nhiều tính chất trong mục 2 có thể mở rộng cho đường tròn Thebault, và bởi tính đa dạng và phong phú của chúng nên thật khó để tìm được điểm dừng. Trong mục này chúng ta chỉ tìm hiểu một số tính chất tiêu biểu của đường tròn Thebault, một số mở rộng khác xin được nhường lại cho bạn đọc tự khám phá.

Tính chất 3.1. (Bổ đề Sawayama). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). D là một điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi (O') là đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với AD và đỉnh C. (O') tiếp xúc với các đoạn thẳng CD, AD lần lượt tại E, F. Khi đó I, E, F thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi K là tiếp điểm của (O') với (O). KE, KF lần lượt cắt (O) lần thứ hai tại N, M. AM cắt EF tại J. Khi đó M là điểm chính giữa cung BC.

Do K là tâm vị tự ngoài của (O) và (O') nên hiển nhiên $EF \parallel MN$.

Do đó $\angle AKE = \angle AMN = \angle AJE$, suy ra tứ giác $AKJE$ nội tiếp.

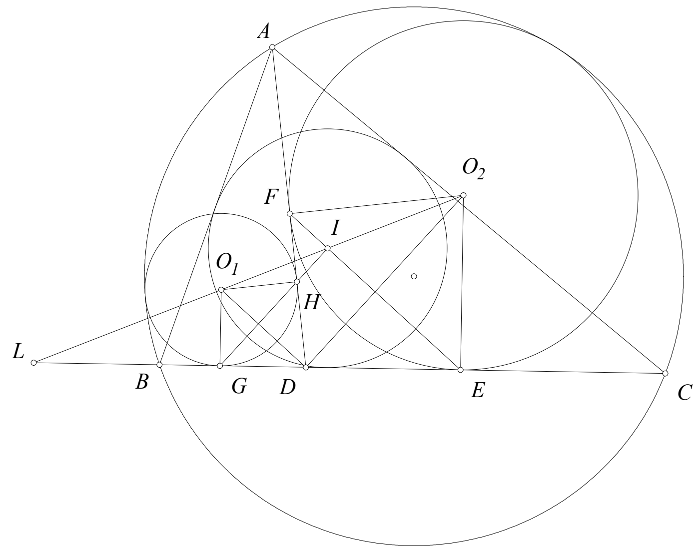
Mà (O') tiếp xúc với AD nên $\angle EFK = \angle AEK = \angle AJK$, nghĩa là đường tròn ngoại tiếp tam giác JKF tiếp xúc với AM.

Suy ra $MJ^2 = MF.MK$. Mặt khác, $\angle MKC = \angle BCM$ nên $MC^2 = MF.MK$, ta thu được $MJ^2 = MC^2$ hay $MB = MC = MJ$.

Lại có M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC, suy ra $J \equiv I$ hay $I \in EF$. □

Nhận xét. Khi $D \equiv B$ ta thu được tính chất 2.1.

Tính chất 3.2. (Định lý Sawayama-Thebault). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). D là một điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi $(O_1), (O_2)$ lần lượt là các đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với đường thẳng AD và các đỉnh B, C. Khi đó I, O_1, O_2 thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi L là giao điểm của O_1O_2 và BC; G, H là tiếp điểm của (O_1) với DB, DA; E, F là tiếp điểm của (O_2) với DC, DA.

Theo tính chất 3.1, I là giao điểm của EF và GH.

Gọi I' là giao của GH và O_1O_2. Do GH và DO_2 cùng vuông góc với DO_1 nên $GH \parallel DO_2$.

Suy ra $\dfrac{LI'}{LO_2} = \dfrac{LG}{LD}$. (1)

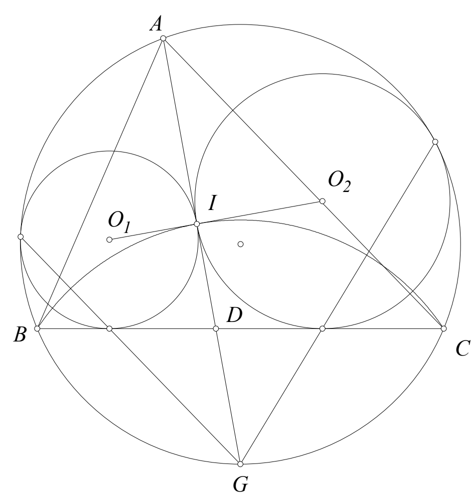
Mặt khác, $O_1G \parallel O_2E$ nên $\dfrac{LO_1}{LO_2} = \dfrac{LG}{LE}$. (2)

Chia theo vế của (1) cho (2) ta thu được $\dfrac{LI'}{LO_1} = \dfrac{LE}{LD}$ hay $O_1D \parallel EI'$.

Mà EI và O_1D cùng vuông góc với O_2D nên $EI \parallel O_1D$. Từ đó $I' \equiv I$ hay O_1, I, O_2 thẳng hàng. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Từ tính chất trên suy ra $(O_1), (I), (O_2)$ có một tiếp tuyến chung khác BC (IMO Shortlist 1969).

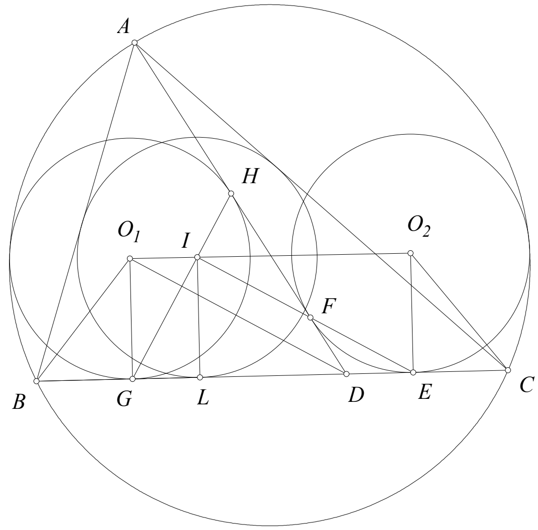
Tính chất 3.3. Nếu D là chân phân giác góc A thì (O_1) tiếp xúc với (O_2).



Chứng minh. Gọi G là điểm chính giữa cung BC không chứa A.

Chúng ta biết rằng phương tích từ G đến họ các đường tròn ω tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với BC sao cho ω và G nằm khác phía so với BC đều bằng $GB^2 = GI^2$. Do (O_1) tiếp xúc với GI nên I chính là tiếp điểm của (O_1) với AG. Tương tự suy ra (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại I. □

Tính chất 3.4. (Jean-Pierre Ehrmann và Cosmin Pohoata). Cho tam giác ABC, P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi $\mathcal{T}_A^b$, $\mathcal{T}_A^c$ là hai đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với đường thẳng AP. Tương tự có $\mathcal{T}_B^c$, $\mathcal{T}_B^a$, $\mathcal{T}_C^a$, $\mathcal{T}_C^b$. Khi đó 6 đường tròn $\mathcal{T}_A^b$, $\mathcal{T}_A^c$, $\mathcal{T}_B^c$, $\mathcal{T}_B^a$, $\mathcal{T}_C^a$, $\mathcal{T}_C^b$ bằng nhau khi và chỉ khi P là điểm Nagel của tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi D là giao của AP với BC. Trước tiên ta giả sử rằng $R(\mathcal{T}_A^b) = R(\mathcal{T}_A^c)$ (tương ứng với hai đường tròn (O_1) và (O_2)). Hiển nhiên khi đó bán kính của 2 đường tròn bằng r.

Gọi G, H là tiếp điểm của (O_1) với $DB, DA; E, F$ là tiếp điểm của (O_2) với DC, DA. L là tiếp điểm của (I) với BC.

Do $R(O_1) = R(O_2)$ nên BO_1O_2C là hình thang cân, suy ra $BG = CE$.

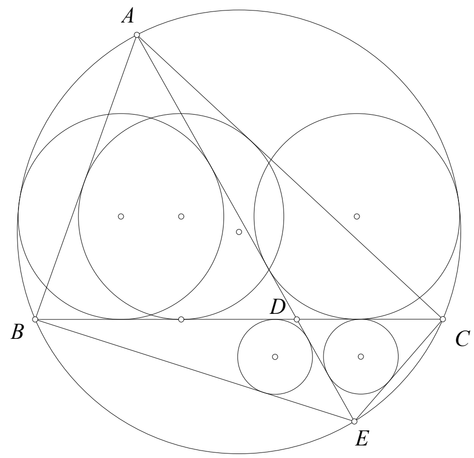
O_1ILG là hình chữ nhật, O_1IED là hình bình hành nên $GL = O_1I = DE$.

Vậy $BL = BG + GL = CE + DE = CD$. Suy ra D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.

Ngược lại ta luôn dựng được đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với $(O), BC$ và có bán kính bằng r. Khi đó kẻ tiếp tuyến từ A đến (O_1) cắt BC tại D. Dựng đường tròn Thebault (O_2) của tam giác ABC ứng với AD và đỉnh C. Suy ra bán kính của (O_2) cũng bằng r, tức là $R(O_1) = R(O_2)$ và D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.

Như vậy $R(O_1) = R(O_2) = r$ khi và chỉ khi D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC. Xét tương tự với các đường tròn còn lại ta có đpcm. $\square$

Tính chất 3.5. AD giao (O) lần thứ hai tại E. Khi đó bán kính của hai đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với AD bằng nhau khi và chỉ khi bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác EDB và EDC bằng nhau.



Chứng minh. Theo tính chất 3.4 thì bán kính của hai đường tròn Thebault của tam giác ABC ứng với AD bằng nhau khi và chỉ khi D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.

Ta có $r_{EDB} = r_{EDC}$ khi và chỉ khi $\dfrac{S_{EDB}}{p(EDB)} = \dfrac{S_{EDC}}{p(EDC)}$ hay $\dfrac{p(EDB)}{p(EDC)} = \dfrac{DB}{DC}$. (1)

Do hai tam giác ADB và CDE đồng dạng nên $\dfrac{p(CDE)}{p(ADB)} = \dfrac{CD}{AD}$, tương tự $\dfrac{p(BDE)}{p(ADC)} = \dfrac{BD}{AD}$.

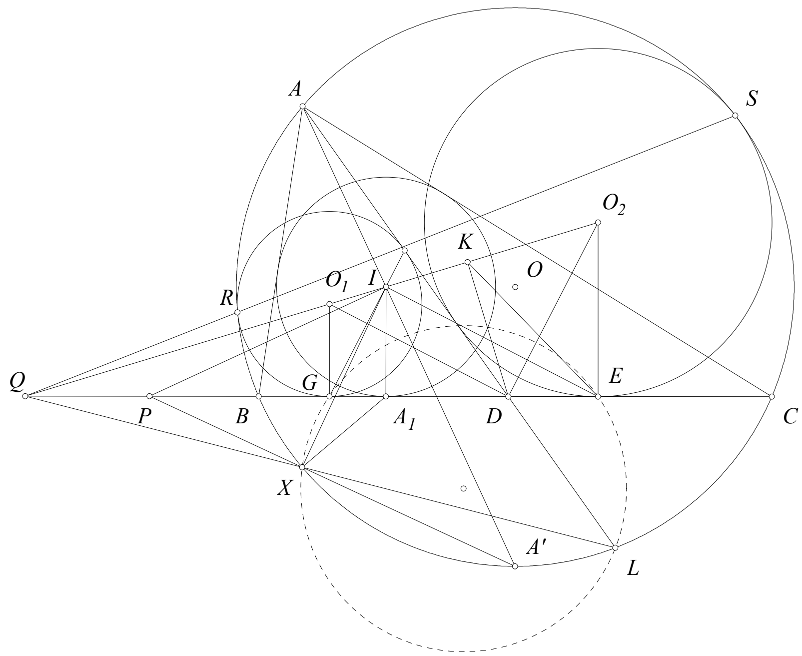
Như vậy $\dfrac{p(EDB)}{p(EDC)} = \dfrac{p(ADC)}{p(ADB)} \cdot \dfrac{BD}{CD}$. Suy ra (1) tương đương $p(ADC) = p(ADB)$ hay D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC. Ta có đpcm. □

Nhận xét. Có thể chứng minh tính chất 3.5 dựa vào bài toán sau:

(Vladimir Zajic). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kì nằm trên cạnh BC, AP cắt (O) lần thứ hai tại D. Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác APB, APC; $(J_1), (J_2)$ lần lượt là đường tròn tiếp xúc với các cặp tia (PB, PD), (PC, PD) và cùng tiếp xúc trong với (O). Khi đó I_1I_2, J_1J_2, BC đồng quy.*

Lời giải cho bài toán này bạn đọc xem tại [4].

Tính chất 3.6. Gọi G, E lần lượt là tiếp điểm của (O_1) và (O_2) với BC, AD giao (O) lần thứ hai tại L, X là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O). Khi đó G, E, L, X cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Gọi A' là giao của AI với (O), $A'X$ giao BC tại P, A_1 là tiếp điểm của (I) với BC. Ta đã chứng minh được $PI \perp AI, PA' \perp IX$ do đó $\angle PA_1X = \angle PIX = \angle PA'I = \angle XLA$. Suy ra tứ giác XA_1DL nội tiếp.

Gọi R, S lần lượt là tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ với (O). RS giao BC tại Q. Theo định lý Monge-D'Alembert ta có Q là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2), cũng chính là cực của phép nghịch đảo của hai đường tròn. Suy ra tứ giác $RSEG$ nội tiếp.

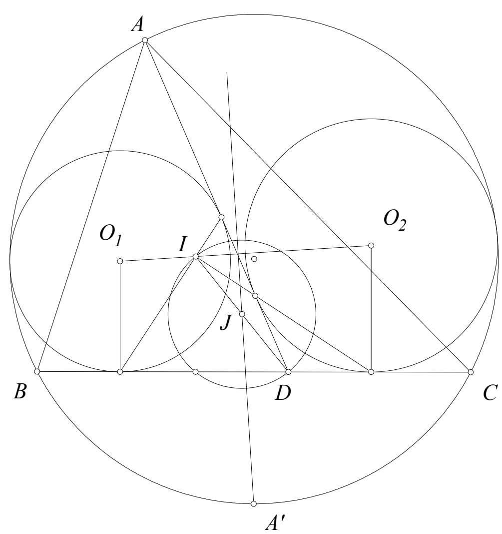
Gọi K là hình chiếu của D trên O_1O_2.

Ta có $\angle O_1IG = \angle KO_2D = \angle KED$, suy ra tứ giác $GIKE$ nội tiếp. Đồng thời ta cũng có tứ giác $IKDA_1$ nội tiếp đường tròn đường kính ID. Do đó $QR.QS = QA_1.QE = QI.QK = QA_1.QD$.

Vậy tứ giác $RSDA_1$ nội tiếp. Áp dụng định lý về tâm đẳng phương cho 3 đường tròn (O), $(RSEA_1)$, (XA_1DL) suy ra LX, BC, RS đồng quy tại Q.

Suy ra $QG.QE = QR.QS = QX.QL$, tức là G, E, L, X cùng thuộc một đường tròn. □

Tính chất 3.7. Gọi A' là điểm chính giữa cung BC không chứa A, J là trung điểm ID. Khi đó $A'J$ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).



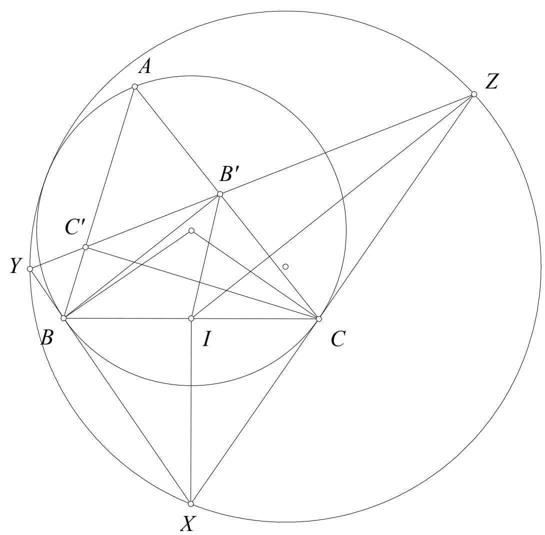
Chứng minh. Việc chứng minh A' thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này khá đơn giản. Do đó chúng ta chỉ quan tâm đến điểm J.

Do I nằm trên đường thẳng nối tiếp điểm của (O_1) với AD, BD và J là trung điểm ID nên J thuộc trục đẳng phương của (O_1) và $(D, 0)$ (xem [3]). Tương tự, J thuộc trục đẳng phương của (O_2) và $(D, 0)$. Theo định lý về tâm đẳng phương suy ra J thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Từ lời giải trên suy ra đường tròn đường kính AD trực giao với (O_1) và (O_2).

4 Ứng dụng của bổ đề Sawayama-Thebault

Bài 1. (IMO 2012 Turkey Preparation). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BB', CC'. Tiếp tuyến của (O) tại B, C giao nhau tại X. $B'C'$ giao XB, XC lần lượt tại Y, Z. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O).

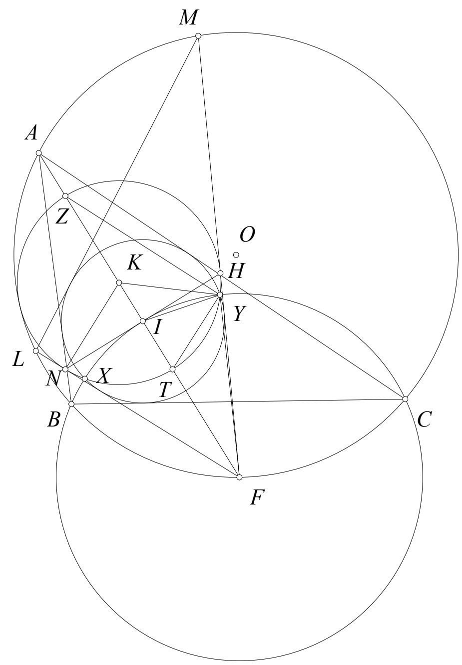


Chứng minh. Gọi I là trung điểm BC. Do I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BC'B'C$ nên $IB' = IC$.

Lại có $\angle B'CZ = \angle ABC = \angle ZB'C$ nên $ZB' = ZC$. Suy ra ZI là phân giác $\angle YZX$.

Hiển nhiên XI là phân giác $\angle YXZ$, do đó I là tâm nội tiếp tam giác XYZ, mà X là trung điểm BC nên theo bổ đề Sawayama, (ABC) là đường tròn mixtilinear nội tiếp của tam giác XYZ, tức là (O) tiếp xúc với (XYZ). $\square$

Bài 2. (All-Russian MO 2013). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi X, Y là giao điểm của (BIC) và $(I), Z$ là tâm vị tự ngoài của (I) và (BIC). Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (O).



Chứng minh. Gọi F là giao của AI với (O), T là tâm vị tự trong của (O) và (I), K là tâm của (XYZ).

Ta có $\dfrac{ZI}{ZF} = \dfrac{TI}{TF} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{YI}{YF} = \dfrac{XI}{XF}$ nên X, Y, Z, T cùng nằm trên đường tròn Apollonius của đoạn thẳng EF ứng với tỉ số $\dfrac{r}{R}$, nói cách khác là đường tròn Apollonius của tam giác IYF.

Tâm K của $(XYZT)$ là giao của tiếp tuyến tại Y của (IYF) với IF. Suy ra $\angle KYI = \angle IFY$.

Ta thu được $\angle KYF + \angle IYF = \angle IFY + 2\angle IYF = 180^\circ$, suy ra YF là phân giác ngoài $\angle KYI$.

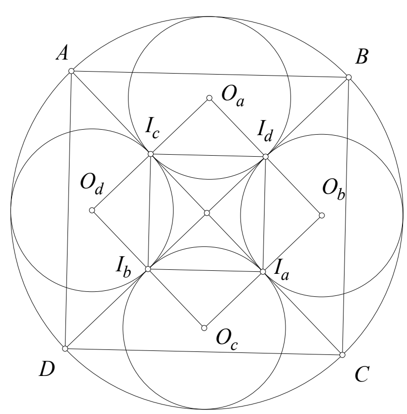
Nghĩa là $\dfrac{FI}{FK} = \dfrac{IY}{KI}$ hay F là tâm vị tự ngoài của (I) và (XYZ).

Kẻ tiếp tuyến FN, FH tới (XYZ), FN, FH lần lượt cắt (O) tại L, M.

Do $(ZTIF) = -1$ nên theo hệ thức Newton ta có $KN^2 = KT^2 = KI.KF$, suy ra I là hình chiếu của N trên KF, nghĩa là I là trung điểm NH.

Theo định lý Poncelet, (I) là đường tròn nội tiếp tam giác LFM nên áp dụng bổ đề Sawayama suy ra (XYZ) là đường tròn mixtilinear nội tiếp của tam giác FLM, hay (XYZ) tiếp xúc với (O). □

Bài 3. (Sharygin Geometry Olympiad 2009). Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Biết rằng 4 đường tròn tiếp xúc với các đường chéo và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình vuông.



Chứng minh. Kí hiệu I_a, I_b, I_c, I_d lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC, hai đường chéo giao nhau tại I, $(O_a), (O_b), (O_c), (O_d)$ lần lượt là 4 đường tròn tiếp xúc với các cặp tia

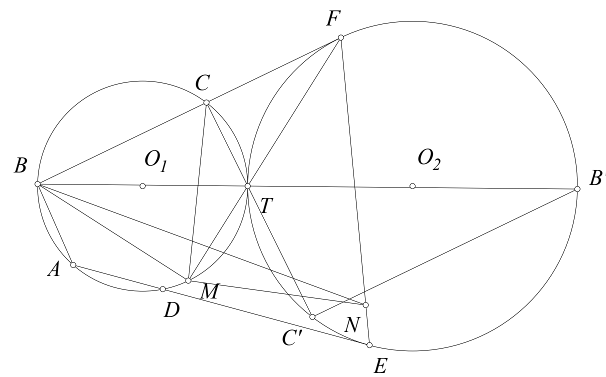
$IA, IB; IB, IC; IC, ID; ID, IA$ và cùng tiếp xúc trong với $(ABCD)$. Áp dụng định lý Sawayama-Thebault suy ra $I_a \in O_bO_c$. Do $R(O_a) = R(O_b) = R(O_c) = R(O_d)$ nên $R(I_a) = R(I_b) = R(I_c) = R(I_d)$.

Từ đó hai tứ giác $I_aI_bI_cI_d$ và $ABCD$ có cạnh tương ứng song song.

Ta đã biết $I_aI_bI_cI_d$ là hình chữ nhật, do đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác, áp dụng tính chất 3. cho tam giác ABC với hai đường tròn Thebault (O_a) và (O_b) suy ra I là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B với AC. Mà I là trung điểm AC nên tam giác ABC cân tại B. Suy ra $ABCD$ là hình vuông. □

Bài 4. (CGMO 2013). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại T. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O_1) sao cho AD, BC tiếp xúc với (O_2) lần lượt tại E, F. Phân giác $\angle ABF$ giao EF tại N, FT giao (O_1) lần thứ hai tại M. Chứng minh rằng M là tâm ngoại tiếp tam giác BCN.



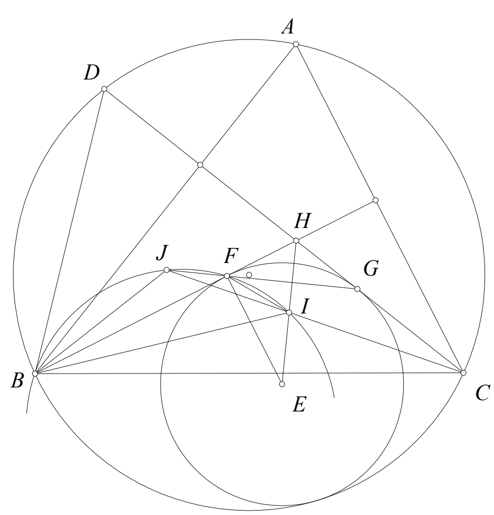
Chứng minh. Gọi B', C' lần lượt là giao của BT, CT với (O_2). Do T là tâm vị tự của (O_1) và (O_2) suy ra $BC \parallel B'C'$.

Từ đó F là điểm chính giữa cung $B'C'$. Phép vị tự tâm T biến $B' \mapsto B, C' \mapsto C, F \mapsto M$ nên M là điểm chính giữa cung BC.

Do (O_2) là đường tròn Thebault bàng tiếp của tam giác ABC ứng với đường thẳng AD và N là giao của phân giác $\angle ABC$ với EF nên theo bổ đề Sawayama-Thebault, N là tâm bàng tiếp góc B của tam giác ABC.

Ta đã biết điểm chính giữa cung BAC tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN, suy ra đpcm. □

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Đường tròn ω có tâm E tiếp xúc với các đoạn thẳng HB, HC và tiếp xúc với (O). Chứng minh rằng trung điểm HE là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BHC.



Chứng minh. Gọi D là giao của CH với (O). Suy ra D đối xứng với H qua AB.

Gọi F, G lần lượt là tiếp điểm của ω với HB, HC; I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BHC, BDC.

Theo bổ đề Sawayama-Thebault suy ra J, F, G thẳng hàng.

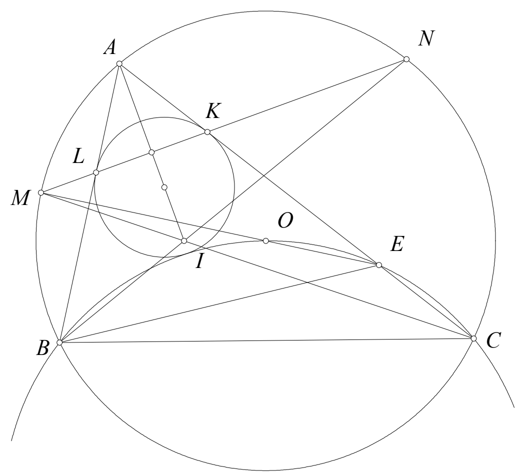
Ta có $\angle BIJ = 180^\circ - \angle BIC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BHC = \angle HFG = \angle JFB$.

Suy ra tứ giác $BJFI$ nội tiếp.

Ta thu được $\angle HFI = 180^\circ - \angle BFI = 180^\circ - \angle BJC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BDC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BHD = \angle FHI$.

Suy ra I là trung điểm HE. Ta có đpcm. $\square$

Bài 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại L, K và tiếp xúc ngoài với (BOC). Chứng minh rằng LK chia đôi AI với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với (BOC). Ta có $\angle BEA = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC$.

Do đó tam giác AEB cân tại E. Suy ra OE là trung trực của đoạn thẳng AB và OE giao CI tại điểm chính giữa M của cung AB.

Do ω là đường tròn Thebault của tam giác BEC ứng với đường thẳng BA và M là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác BEC nên M, L, K thẳng hàng.

Tương tự gọi N là điểm chính giữa cung AC thì N, L, K thẳng hàng. Mà MN là trung trực của đoạn thẳng AI nên LK chia đôi AI. $\square$

Tài liệu

[1] Fukagawa, Hidetoshi, and Dan Pedoe, *Japanese temple geometry problems*, Winnipeg: Charles Babbage Research Centre, 1989.

[2] Nguyễn Văn Linh, *Định lý Casey và ứng dụng*, Euclidean Geometry Blog.
http://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/03/26/caseys-theorem/

[3] Nguyễn Văn Linh, *Trục đẳng phương của đường tròn điểm*, Euclidean Geometry Blog.
http://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/02/04/radical-axis-of-a-point-and-a-circle/

[4] Nguyễn Văn Linh, *Định lý Monge-D'Alembert và ứng dụng*, Euclidean Geometry Blog.
http://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/04/06/monge-dalemberts-theorem/

[5] Nguyễn Văn Linh, *Một số vấn đề về đa giác lưỡng tâm*, Euclidean Geometry Blog.
http://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/04/19/bicentric-polygons/

[6] Problem 3, Round 6, Geometry Mathley.
http://www.hexagon.edu.vn/mathley/tong-tap-mathley-17.html

[7] Jean Louis Ayme, *A new mixtilinear incircle adventure I, II, III.*
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol4.html

[8] Khoa Lu Nguyen and Juan Carlos Salazar, *On mixtilinear incircles and excircles*, Forum Geometricorum Vol.6 (2006) 1–16.
http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200601.pdf

[9] Artofproblemsolving Forum.
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1

Email: *Lovemathforever@gmail.com*