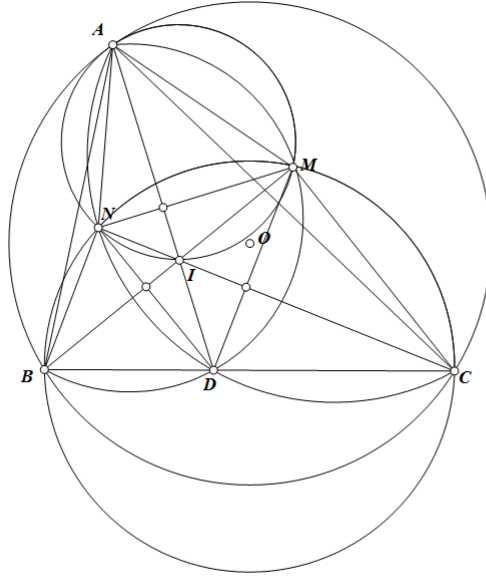


Từ một bài toán trên diễn đàn Aops tới một số tìm tòi

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Bài viết này đề cập tới một bài toán đẹp trên Aops mà tôi đã đưa ra một lời giải mới cùng những khai thác trên cấu hình.

Bài toán 1(Aops): Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I . $AI \cap BC = D$, trung trực AD cắt BI, CI lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng: A, M, N, I đồng viên.

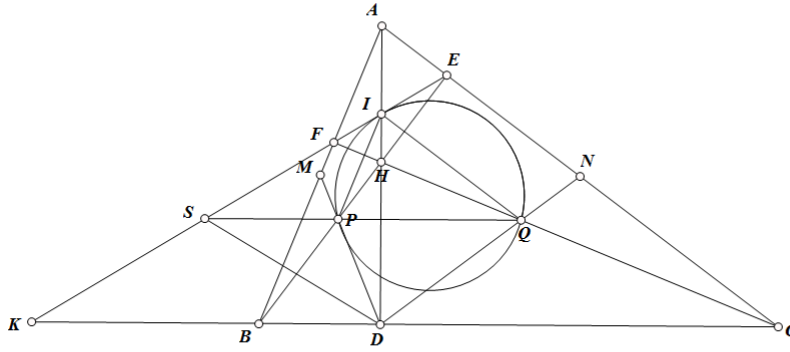


Lời giải: Gọi $BI \cap (ADC) = M', B; CI \cap (ADC) = N', C$ thế thì do $D \in BC$ nên $\angle AN'I = \angle ADC$ và $\angle AM'I = \angle ADB$ nên A, M', N', I đồng viên vậy ta cần chứng minh $M \equiv M', N \equiv N'$ hay là $M'N'$ là trung trực AD . Từ cách dựng các điểm M', N' ta có: $IM'.IB = IN'.IC (= IA.ID)$ do đó $BCM'N'$ nội tiếp. Do đó $\angle M'AI = \angle IN'M' = \frac{\angle B}{2}$. Ta có: $\angle DN'M' = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$, $\angle AN'M' = \angle AN'D - \angle DN'M' = 180^\circ - \angle C - (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}) = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = \angle DN'M'$. Tương tự $\angle AM'D = \angle DM'N'$ do đó $\triangle AN'M' = \triangle DN'M' (g.c.g)$ do đó $M'N'$ là trung trực

AD hay là $M \equiv M', N \equiv N'$. Vậy ta có: A, M, N, I đồng viên(đpcm).

Nhận xét: Từ trên ta cũng suy ra được kết quả tương đương I là trực tâm tam giác DMN . Bài toán này hay và cũng là một bài toán có nhiều ứng dụng trong giải toán. Cách giải ở trên là cách làm trực tiếp cho bài toán trên(sử dụng hình phụ trên cầu hình ban đầu) được tôi đăng trên **Aops**. Đại đa số các cách giải khác là dựa vào việc đổi mô hình trên trực tâm, đó là một hướng đi hay, và có ý nghĩa khai thác.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Gọi M, N là trung điểm AB, AC . Gọi $DM \cap BE = P, DN \cap CF = Q$. Gọi $AD \cap EF = I$. Chứng minh rằng: (IPQ) tiếp xúc EF .

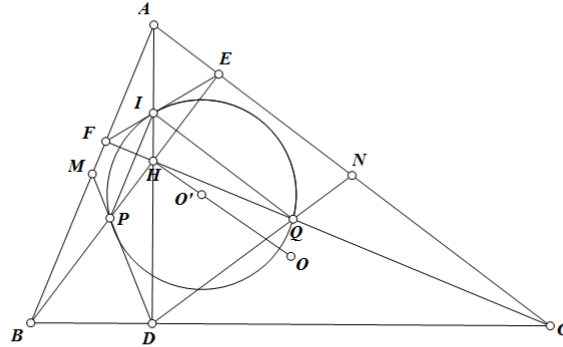


Lời giải: Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Theo định lí *Menelaus* cho các tam giác ABH, ACH thì: $\frac{DA}{DH} \cdot \frac{PH}{PB} \cdot \frac{MB}{MA} = \frac{DA}{DH} \cdot \frac{QH}{QC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$, do đó $\frac{PH}{PB} = \frac{QH}{QC}$ hay là $QP \parallel BC$. Vậy hay là $\angle HEF = \angle HCB = \angle HQP$ hay tứ giác $EFPQ$ nội tiếp. Gọi $EF \cap PQ = S, EF \cap BC = K$, ta thấy EA, EH lần lượt là phân giác ngoài và trong của góc $\angle FED$ do đó $\frac{IH}{IA} = \frac{HD}{HA}$ hay là ta thu được: $\frac{DH}{DA} = \frac{PH}{PB} = \frac{IH}{IA} = \frac{HQ}{QC}$, do đó $IP \parallel AB, IQ \parallel AC$ nên $\angle IPQ = \angle B, \angle IQP = \angle C$. Để ý rằng: $\angle PDQ = 180^\circ - \angle NDC - \angle MDB = 180^\circ - (180^\circ - \angle A) = \angle A = 180^\circ - \angle PHQ$ do đó $HPDQ$ nội tiếp. Vậy $\angle DPQ = \angle DHC = \angle B = \angle IPQ$ mà $\angle PID = \angle DAB = \angle PDA$ do đó $PI = PD$ tương tự thì: $QI = QD$ nên PQ là trung trực ID . Do đó $SI = SD = SK$

theo hệ thức *Newton* thì: $SI^2 = SK^2 = SE.SF = SP.SQ$ do đó EF tiếp xúc (IPQ).

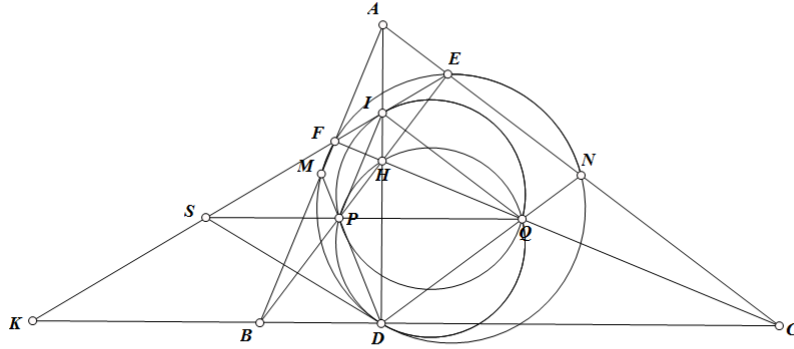
Nhận xét: Nếu tinh mắt các bạn có thể rút gọn lời giải **bài toán 2** bằng cách ứng dụng **bài toán 1** vào giải mà thôi. Bởi điểm H thực ra có vai trò giống với điểm I trong **bài toán 1** do đó đoạn chứng minh S nằm trên trung trực ID có thể rút ngắn đi bằng cách sử dụng **bài toán 1** luôn sau khi chứng minh tứ giác $HPDQ$ nội tiếp. Như vậy thực chất thông qua cách giải ở trên, ta thấy **bài toán 1** chỉ là cấu hình thu gọn và là một kết quả đơn giản khi chuyển về cấu hình đầy đủ với trục tâm- do đó khi chế hay giải một bài toán, việc chuyển đổi cấu hình thực sự rất hay được dùng. Tiếp tục khai thác tính chất vị tự của cấu hình này ta có bài toán tiếp theo.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N là trung điểm của AB, AC . Gọi $DM \cap BE = P, DN \cap CF = Q$ và $AD \cap EF = I$. Gọi O' là tâm ngoại tiếp tam giác IPQ . Chứng minh rằng: $O'H$ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC .



Lời giải: Từ lời giải **bài toán 2** thì $\triangle IQP$ có các cạnh tương ứng song song với các cạnh $\triangle ABC$ nên ta thấy phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{HI}{HA}$ biến $\triangle IQP \leftrightarrow \triangle ABC$. Lại thấy $HI \perp BC$ nên $HI \perp PQ$, tương tự $HQ \perp IP$ nên H là trực tâm tam giác IPQ do đó theo tính chất vị tự thì: đường thẳng *Euler* của tam giác IPQ biến thành đường thẳng *Euler* của tam giác ABC , mà chúng cùng đi qua H nên $O'H$ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC (đpcm).

Bài toán 4(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N là trung điểm của AB, AC . Gọi $DM \cap BE = P, DN \cap CF = Q$. Chứng minh rằng: (HPQ) tiếp xúc đường tròn *Euler* của tam giác ABC .



Lời giải: Ta gọi K là giao điểm của EF và BC , gọi $AD \cap EF = I$. Theo chứng minh của **bài toán 2** thì $SK^2 = SI^2 = SD^2 = SP.SQ = SE.SF$ nên chú ý $D, E, F \in (Euler)$ của tam giác ABC nên SD tiếp xúc $(Euler)$ của tam giác ABC và cũng tiếp xúc (DPQ) nên (DPQ) tiếp xúc $(Euler)$ của tam giác ABC . Để ý cũng từ **bài toán 2** ta có H, D, P, Q đồng viên do đó (HPQ) tiếp xúc đường tròn *Euler* của tam giác ABC (đpcm).

Nhận xét: Các **bài toán 1,2** đều là các bài toán có ý nghĩa. Việc chuyển đổi mô hình để giải một bài toán đôi khi lại mang lại những kết quả bất ngờ thú vị.

Cuối cùng quay lại mô hình ban đầu từ **bài toán 4** ta có thêm bài toán sau, mời bạn đọc thử sức.

Bài toán 5: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) có đường phân giác trong AD . Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Đường trung trực AD cắt BI, CI tại M, N . Chứng minh rằng: (AMN) tiếp xúc (O) .