Các chuyên đề hình học dành cho các bạn THCS(Số 4)

Nguyễn Duy Khương-khoá 1518 chuyên Toán-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Đã khá lâu tôi mới mở lại chuyên mục này, mong các bạn lớp 9 thông cảm bởi thời gian gần đây tôi khá bận. Bài viết lần này sẽ đề cập tới một kĩ thuật cực kì quan trọng-kĩ thuật sử dụng tam giác đồng dạng.

Chuyên đề số 4:

Kĩ thuật sử dụng tam giác đồng dạng trong giải toán hình học

Trong các bài toán hình học thi vào 10 thì việc sử dụng được các kiến thức nâng cao sẽ giúp nhìn rõ bản chất vấn đề xong nếu biết cách sử dụng các kiến thức đơn giản vào giải toán thì đôi lúc chúng ta sẽ thu được những lời giải ngắn gọn bất ngờ.

I) Một số lưu ý:

1) Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng cùng điểm K, K' lần lượt thuộc $BC, B'C'$ sao cho $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{K'B}{K'C}$ thì $\triangle AKB \sim \triangle A'K'B'$.

2) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy các điểm E, F thuộc AC, AB. Gọi $(AEF) \cap (O) = G, A$. Khi đó $\triangle GFB \sim \triangle GEC$.

3) +) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c thì: $\dfrac{a}{sinA} = \dfrac{b}{sinB} = \dfrac{c}{sinC} = 2R$ (**Định lí hàm số Sin**).

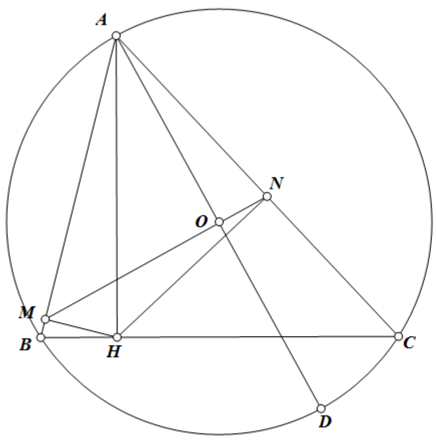
+) $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.sin\angle BAC}{2}$.

4) Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng theo tỉ số k. Khi đó: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$.

5) Việc tìm ra tam giác đồng dạng hoàn toàn là dựa vào việc nhìn ra một số cấu hình quen thuộc, những hình vẽ tạo ra rất nhiều tỉ số bằng nhau, hoặc một số góc đặc biệt cũng là dấu hiệu cho việc dùng tam giác đồng dạng.

II) Một số bài tập vận dụng:

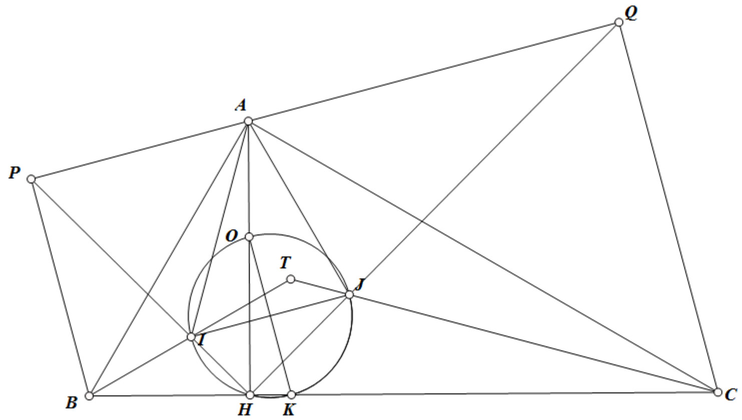
Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có đường cao $AH = R\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông hạ từ H xuống AB, AC. Chứng minh rằng: M, O, N thẳng hàng.



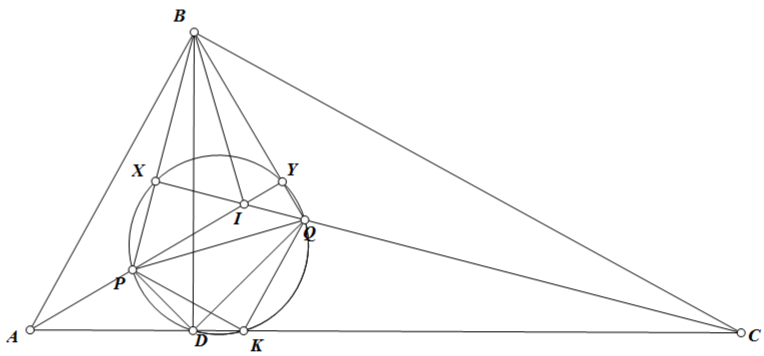
Lời giải: Gọi AD là đường kính của (O). Ta thấy rằng theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB, AHC thì: $AH^2 = AM.AB = AN.AC = 2R^2 \Rightarrow AN.AC = AO.AD = AM.AB$ do đó suy ra: $\triangle AON \sim \triangle ACD(c.g.c)$ đồng thời $\triangle AOM \sim \triangle ABD(c.g.c)$ hay là: $\angle AON = \angle AOM = 90°$. Hay là M, O, N thẳng hàng.

Nhận xét: Việc xử lí giả thiết lạ để đưa về chứng minh tam giác đồng dạng là điểm mấu chốt của bài toán này.

Bài toán 2(IMO Shortlist): Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Gọi I, J là tâm nội tiếp các tam giác ABH, ACH. Gọi P, Q là tâm $(IAB), (JAC)$. Chứng minh rằng: $PQ \| IJ$.



Lời giải: Ta cần **bổ đề** sau:" Cho tam giác ABC vuông tại B có đường cao BD. Gọi P, I, Q lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABD, ABC, ADC. Chứng minh rằng tâm (IPQ) nằm trên AC".



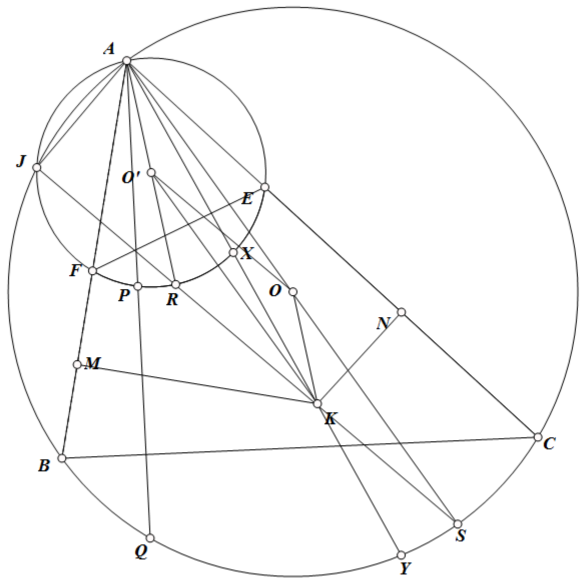
Chứng minh: Trước khi chứng minh tôi xin nêu 1 bổ đề quen thuộc:" Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy O' đối xứng O qua BC. Gọi H là trực tâm tam giác ABC khi đó O' là tâm (HBC)."

Gọi $CQ \cap AP = X, AP \cap BQ = Y$. Ta có: $\angle CXB = 180^\circ - \angle PBC - \dfrac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle BAC - \dfrac{\angle C}{2} - \dfrac{\angle C}{2} = 90^\circ$. Tương tự $\angle PYB = 90^\circ$ do đó chú ý A, P, I thẳng hàng cùng C, Q, I thẳng hàng nên I là trực tâm tam giác BPQ. Gọi $(PDQ) \cap AC = D, K$. Ta để ý rằng: $\angle PDQ = 90^\circ$ nên $\angle PKQ = 90^\circ$. Do $\angle PDA = 45^\circ = \angle KQP$ nên $\triangle KPQ$ vuông cân tại K. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác BPQ thế thì: $\angle POQ = 2\angle PBQ = 2(\dfrac{\angle DBA + \angle DBC}{2}) = \angle ABC = 90^\circ$ do đó $\triangle POQ$ vuông cân tại O nên K đối xứng O qua PQ, theo bổ đề thì K là tâm của (PIQ). Vậy ta thu được tâm (PIQ) nằm trên AC(đpcm).

Quay trở lại bài toán, ta dễ thấy rằng: A, P, B, H và H, Q, C, A đồng viên. Đồng thời: A, P, Q cùng nằm trên phân giác ngoài góc BAC. Vậy: $\angle API = \angle ABC$, theo **bổ đề** thì: H, I, J, O đồng viên(gọi O là tâm (AIJ)). Theo **bổ đề** thì ta cũng có tâm nội tiếp tam giác ABC là T thì đồng thời là trực tâm tam giác AIJ. Vậy $\angle TAJ = \angle TAC - \angle JAC = \dfrac{\angle BAC - \angle HAC}{2} = \dfrac{\angle HAB}{2} = \angle HAI$ vậy AI, AT đẳng giác do đó A, O, H thẳng hàng nên $\angle JIH = \angle JOH = 180^\circ - \angle JOA = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle OAJ) = \angle HAC = \angle ABC = \angle HPQ$ hay $PQ \| IJ$(đpcm).

Nhận xét: Tôi giới thiệu lời giải trên bởi bổ đề dùng ở trên rất hay và có nhiều ứng dụng. Thực tế có thể chứng minh ngắn hơn một chút nhờ kĩ thuật sử dụng tam giác đồng dạng: ta có thể chứng minh $\angle ABC = \angle HIJ$ bằng cách chứng minh $\triangle IHJ \sim \triangle BAC \Leftrightarrow \triangle AIH \sim \triangle CJH$(đúng).

Bài toán 3(Nguyễn Quang Trung): Cho tam giác ABC và các điểm F, E lần lượt bất kì nằm trên các cạnh AC, AB. Đường trung trực của BF, CE cắt nhau ở K. Một cát tuyến qua A cắt $(O), (AEF)$ tại các điểm Q, P khác A. Chứng minh rằng: $KP = KQ$.

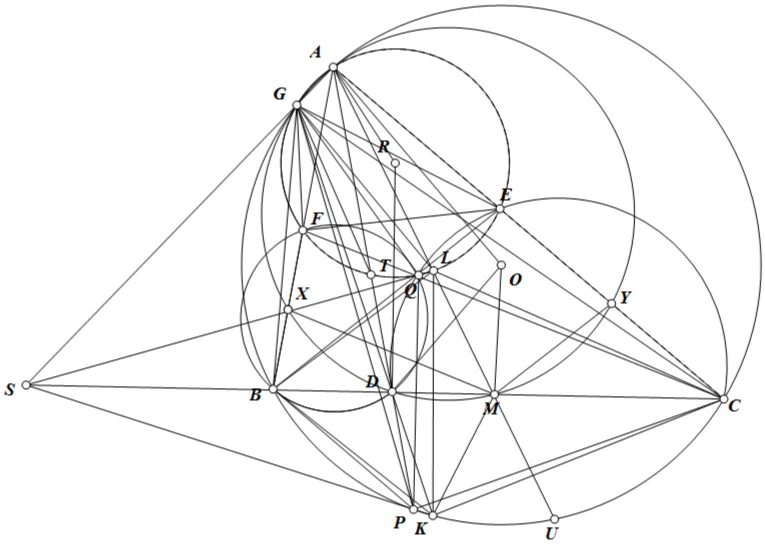


Lời giải: Trước tiên xin nêu lại một tính chất quen thuộc:" Cho (O) và 1 điểm M bất kì, khi đó phương tích từ M đến (O) kí hiệu là $P_{M/(O)}$ và $P_{M/(O)} = |OM^2 - R^2|$. Qua M kẻ hai cát tuyến MAB, MCD thì: $MA.MB = MC.MD = |OM^2 - R^2| = P_{M/(O)}$".

Quay trở lại bài toán, gọi $J, A = (AEF) \cap (O)$. Ta để ý rằng: $\triangle JBF \sim \triangle JCE(g.g)$ nên $\triangle JMF \sim \triangle JNE(c.g.c)$ hay là J, A, N, M, K đồng viên nên $\angle KJA = 90°$. Gọi R, S lần lượt đối xứng O', O qua A thì $\angle RJA = \angle KJA = \angle SJA = 90°$ nên J, R, K, S thẳng hàng do đó OO' đi qua trung điểm AK(theo tiên đề *Euclid*). Do đó $AO'KO$ là 1 hình bình hành. Gọi $AK \cap (AEF), (O) = A, X, Y$, do $-O'A^2 + KO'^2 = -OK^2 + OA^2$ hay là $P_{K/(O)} = -P_{K/(AEF)}$ nên $KX.KA = KY.KA$ hay K là trung điểm XY. Gọi T là trung điểm của PQ thế thì dễ thấy $\triangle JTP \sim \triangle JKX(c.g.c)$ nên J, A, K, T đồng viên suy ra $\angle KTA = \angle KJA = 90°$ nên $KP = KQ$(đpcm).

Nhận xét: Ở trên kĩ thuật đồng dạng trung tuyến đóng vai trò quan trọng nhất trong việc chứng minh các yếu tố đồng viên.

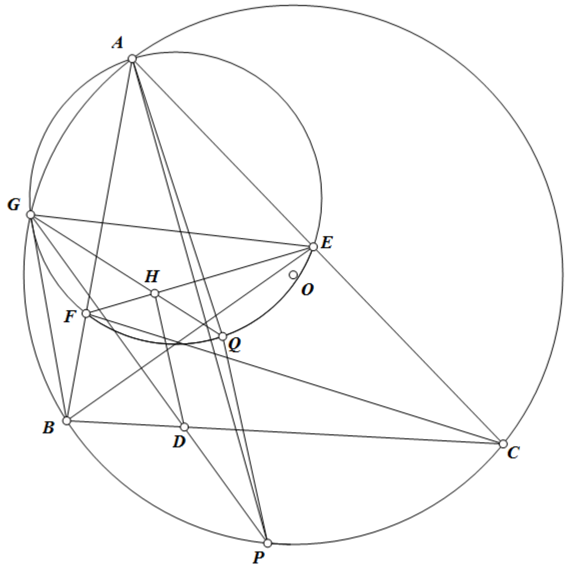
Bài toán 4(Nguyễn Duy Khương)(Cải biến từ đề thi chọn đội tuyển thi HSG lớp 9 THPT chuyên Hà Nội Amsterdam 2017): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P là 1 điểm nằm trên cung BC nhỏ sao cho Q đối xứng P qua BC nằm trong tam giác ABC. Gọi BQ, CQ cắt lần lượt AC, AB tại E, F. Gọi M là trung điểm BC. $AM \cap (O), (AEF) = U, L$. Chứng minh rằng: $BLCU$ là hình bình hành.



Lời giải: Gọi X, Y là trung điểm BF, CE thế thì chú ý rằng: $\triangle GBF \sim \triangle GCE$ nên $\triangle GXF \sim \triangle GYE$ nên A, G, X, Y đồng viên. Do MX, MY là đường trung bình các tam giác BFC, BEC nên $\angle XMY = \angle FQE = 180^\circ - \angle BAC$ nên A, G, X, M, Y đồng viên. Gọi $AM \cap (AEF), (O) = A, L, U$ thì từ trên suy ra: $\triangle AML \sim \triangle AYE(g.g)$ nên vì $\triangle AUL \sim \triangle ACE(g.g)$ và $\triangle AUM \sim \triangle ACY(g.g)$ do đó: $\dfrac{UL}{CE} = \dfrac{ML}{YE} = \dfrac{AM}{AY} = \dfrac{MU}{YC} \Rightarrow \dfrac{ML}{MU} = \dfrac{YE}{YC} = 1$ nên M là trung điểm UL. Vậy $BLCU$ là hình bình hành(đpcm).

Nhận xét: Nếu gọi $(AEF) \cap (O) = G, A$, $AP \cap BC = D$, $GD \cap (O) = G, K$ thì AK là đường đối trung của $\triangle ABC$.

Bài toán 5(Nguyễn Quang Trung)(Tổng quát Việt Nam TST 2015-ngày 1): Cho tam giác ABC và lấy các điểm D, E, F bất kì lần lượt trên BC, CA, AB không trùng các điểm A, B, C. Gọi $(AEF) \cap (O) = G, A$, $GD \cap (O) = G, P$. Lấy điểm Q trên (AEF) sao cho $\angle PAB = \angle QAC$. Gọi $GQ \cap EF = H$. Chứng minh rằng: $DH \| PQ$.



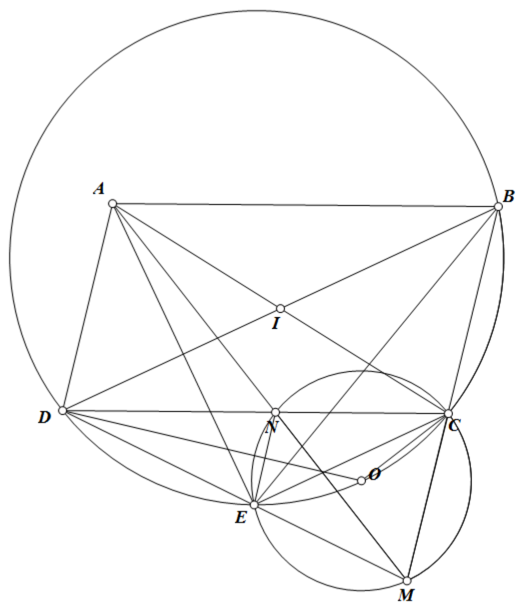
Lời giải: Ta thấy rằng: $\angle QGE = \angle QAE = \angle PAB = \angle DGB$ lại có: $\angle GBD = 180^\circ - \angle GAE = \angle GQE$ do đó $\triangle GQE \sim \triangle GBD(g.g) \Rightarrow \dfrac{GQ}{GB} = \dfrac{GE}{GD}$. Lại có: $\angle GEH = \angle GAF = \angle BPG$ cùng $\angle QGE = \angle QAE = \angle PGB$ nên $\triangle PGB \sim \triangle EGH(g.g)$ nên $\dfrac{GH}{GB} = \dfrac{GE}{GP}$ do đó $\dfrac{GQ}{GH} = \dfrac{GE}{GD}.\dfrac{GP}{GE} = \dfrac{GP}{GD}$ do đó $PQ \| DH$(theo định lí $Thales$ đảo)(đpcm).

Nhận xét: Bài toán này hay và không cần kẻ vẽ hình phụ, ta thấy cách giải quyết còn đơn giản hơn cả bài toán ban đầu, đơn thuần là tam giác đồng dạng thuần tuý và cuối cùng là sử dụng định lí $Thales$.

Bài toán 6: Cho hình bình hành $ABCD$, phân giác góc $\angle BAD$ cắt BC, CD lần lượt tại M, N. Gọi O là tâm (CMN). Gọi $(CMN) \cap (BCD) = E, C$. Chứng minh rằng:

a) O, C, D, B đồng viên.

b) Chứng minh rằng: $\angle AEC = 90^\circ$.



Lời giải: a) Ta thấy rằng: $\angle BAN = \angle DAN = \angle CNM = \angle CMN$ nên các tam giác ADN, CMN cân tại D, C. Do đó $AD = DN = CB, ON = OC$. Lại thấy rằng: $\angle OCB = 180° - \angle OCM = 180° - \angle OCN = \angle OND$ nên $\triangle OND = \triangle OCB(c.g.c)$ suy ra $\angle OBC = \angle ODC$ hay là B, D, O, C đồng viên(đpcm).

b) Trước khi giải ta chứng minh bổ đề sau: "Cho tam giác ABC nội tiếp. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt lại (O) tại điểm D. Lấy E thuộc đoạn AC sao cho $DB = DE$. Chứng minh rằng: $AE = AB$."

Thật vậy, ta gọi $BE \cap (O) = B, J$. Ta có: $\angle JCD = 180° - \angle EBD = 180° - \angle BEC = \angle JED$ mà $\angle EJD = \angle CJD$ nên từ đó chú ý rằng: $DE = DC = DB$ nên $\triangle DJE = \triangle DJC(c.g.c) \Rightarrow \angle JEC = \angle JCE \Rightarrow \angle ABE = \angle AEB$ do đó $AB = AE$(đpcm).

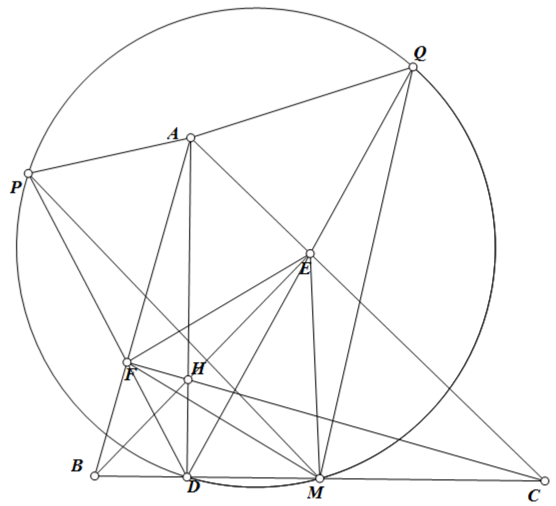
Quay trở lại bài toán, áp dụng bổ đề trên thì: $DN = DE = DA = BC$ chú ý $OE = OC, OD = OB$ nên hiển nhiên ta có: $DECB$ là 1 hình thang cân. Gọi I là trung điểm BD. Vậy $IE = IC = IA$ do đó chú ý I là trung điểm AC nên $\angle AEC = 90°$.

Nhận xét: Việc nhìn ra các *"tâm vị tự quay"* là điểm mấu chốt của các dạng toán loại này.

Bài toán 7(Thi thử KHTN lần 1,2017): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Gọi P, Q đối xứng E, F lần lượt qua AB, AC.

a) Chứng minh rằng: D, F, P thẳng hàng và D, E, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng: (DPQ) đi qua trung điểm BC.



Lời giải: a) Ta có: $\angle PFA = \angle AFE = \angle C$. Lại có: $\angle AFD = 180° - \angle C$ do đó $\angle PFD = 180° - \angle C + \angle C = 180°$ nên P, F, D thẳng hàng. Tương tự D, E, Q thẳng hàng.

b) Ta thấy rằng P, E đối xứng nhau qua AB và Q, F đối xứng nhau qua AC nên $PF = FE = EQ$ nên chú ý rằng: M là tâm (BC) thì $MF = ME$. Lại có: $\angle PFM = 180° - \angle DFM = 180° - \angle DEM = \angle QEM$ do đó $\triangle PFM = \triangle QEM(c.g.c)$ hay là $M \in (PDQ)$(đpcm).

Cuối cùng xin đề nghị một số bài toán luyện tập:

Bài toán 8(Thi vào chuyên KHTN vòng 1,2013): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $AB < AC$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại A, D. Gọi M là trung điểm AD. Lấy E đối xứng D qua O. Gọi $(ABM) \cap AC = A, F$.

a) Chứng minh rằng: $\triangle BDM \sim \triangle BCF$.

b) Chứng minh rằng: $EF \perp AC$.

Bài toán 9(Nguyễn Quang Trung): Cho tam giác ABC, E, F bất kì trên AC, AB. Lấy lần lượt các điểm M, N trên cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{MF}{MB} = \dfrac{NE}{NC} = k$, đường thẳng qua M, N vuông góc với AB, AC cắt nhau tại K. Một cát tuyến qua A cắt

$(AEF), (ABC)$ tại P, Q, hạ KH vuông góc xuống PQ thì $\dfrac{HP}{HQ} = k$.

Bài toán 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) sao cho $AB < AC$. Goi E là trung điểm cung lớn BC của (O). Gọi AD là đường phân giác trong $\angle BAC$. Gọi $DE \cap (O) = E, M$. Gọi K, I, L là hình chiếu của M lên AB, BC, CA. Chứng minh rằng: I là trung điểm KL.