

Chuyên đề: Phương pháp áp dụng nguyên lý Dirichlet để chứng minh bất đẳng thức

Ngày 10 tháng 4 năm 2017

1 Lời nói đầu

Bất đẳng thức là một mảng Toán khó, cũng có không ít ứng dụng, nguyên lý và định lý trong việc chứng minh bất đẳng thức. Nhưng kỹ thuật mà tôi tâm đắc nhất đó là áp dụng nguyên lý Dirichlet và đây là một kỹ thuật khá thú vị mà hôm nay tôi muốn gửi tới các bạn. Nguyên lý Dirichlet (Hay còn gọi là nguyên lý ngăn kéo) được đề xuất ra đầu tiên bởi nhà toán học Đức Johann Dirichlet (1805 - 1859).

2 Lý thuyết

2.1 . Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet được phát biểu như sau: Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng thì sẽ luôn luôn có một chuồng chứa ít nhất hai con thỏ.

2.2 . Ứng dụng trong bất đẳng thức

Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng trong Toán Học, điển hình là bất đẳng thức. Chúng thường được áp dụng để giải một số bài toán bất đẳng thức không thuần nhất. Hôm nay tôi sẽ đưa ra một số ví dụ để các bạn hiểu hơn về vấn đề này.

♦ Trong 3 số a, b, c luôn có 2 số nằm cùng phía với số m bất kỳ (Hay lớn hơn bằng m hoặc bé hơn bằng m).

3 Bài tập ứng dụng

Bài Toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Định hướng lời giải:

Cách 1. Dễ nhận thấy đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Dựa trên nguyên lý Dirichlet thì trong ba số $a - 1, b - 1, c - 1$ luôn có hai số cùng dấu. Giả sử hai số đó là $a - 1, b - 1$, ta có: $c(a - 1)(b - 1) \geq 0$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(a - b)^2 + (c - 1)^2 + c(a - 1)(b - 1) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Cách 2. Ngoài cách sử dụng nguyên lý Dirichlet vẫn còn 1 cách sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 và tôi

cũng xin đưa ra để các bạn tham khảo thêm. Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$2abc + 1 = abc + abc + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Đưa về toán chứng minh:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} &\geq 2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) &\geq 0 \end{aligned}$$

(Đây chính là bất đẳng thức Schur)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 2. [APMO 2005] Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Định hướng lời giải:

Cách 1. Nhận thấy đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Dựa trên nguyên lý Dirichlet thì trong ba số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$ luôn có hai số cùng dấu. Giả sử hai số đó là $a^2 - 1, b^2 - 1$, ta có: $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$. Từ đó ta có bất đẳng thức sau :

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2) = 3(a^2 + b^2) + 3 + (a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 3(a^2 + b^2) + 3$$

Ta quy về bài toán chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + 2) \geq (a + b + c)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Cách 2. Nhận xét: Đây là một bất đẳng thức đối xứng không thuần nhất với các biến a,b,c nằm độc lập. Vì vậy ta cần giảm bớt biến của bất đẳng thức đã cho bằng việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho $3(a + b + c)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right]$$

Đưa về bài toán chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} (b^2 + 2)(c^2 + 2) &\geq 3 \left[1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2c^2 + 1 &\geq 3bc \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc \text{ và } b^2c^2 + 1 \geq 2bc$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên theo vế ta được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 3. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương.

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2 + (abc - 1)^2$$

Định hướng lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 7 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta thu được:

$$2a^2b^2 + 2 + 2b^2c^2 + 2 + 2c^2a^2 + 2 \geq 4ab + 4bc + 4ca$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 3ab + 3bc + 3ca$$

Từ Bài Toán 1 ta có được:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{5}{16}(a + b + c + 1)^2$$

Định hướng lời giải:

Trong ba số a, b, c luôn có 2 số nằm cùng phía với $\frac{1}{4}$. Không mất tính tổng quát, giả sử b^2 và c^2 nằm cùng phía với $\frac{1}{4}$ ta có:

$$\left(b^2 - \frac{1}{4}\right)\left(c^2 - \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

Vì vậy ta có bất đẳng thức sau:

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) = \left(b^2 - \frac{1}{4}\right)\left(c^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}b^2 + \frac{5}{4}c^2 + \frac{15}{16} \geq \frac{5}{4}b^2 + \frac{5}{4}c^2 + \frac{15}{16}$$

Ta cần chứng minh:

$$(4b^2 + 4c^2 + 3)(a^2 + 1) \geq (a + b + c + 1)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức C-B-S ta có:

$$(4b^2 + 4c^2 + 1 + 2)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + a^2 + \frac{1}{2}\right) \geq (a + b + c + 1)^2$$

Từ đây bất đẳng thức đã được chứng minh xong
 Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{2}$ ■

Bài Toán 5. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1$$

Định hướng lời giải:

Dựa trên nguyên lý Dirichlet thì trong 3 số $a - 1, b - 1, c - 1$ với $a + b + c = 3$ thì luôn có 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Ta có:

$$(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) = bc(b - 1)(c - 1) + b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \frac{1}{2}(b + c)^2 - (b + c) + 1$$

Ta lại có:

$$\frac{1}{2}(b + c)^2 - (b + c) + 1 = \frac{1}{2}(3 - a)^2 - (3 - a) + 1 = \frac{1}{2}(a^2 - 4a + 5)$$

Ta quy về bài toán chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5) \geq 2 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 - 3a + 3) \geq 0$$

Bài Toán 6. [Lê Khánh Sỹ] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2 - 2a + 4} + \frac{b^2}{b^2 - 2b + 4} + \frac{c^2}{c^2 - 2c + 4} \geq 1$$

Định hướng lời giải:

Cách 1. Trong ba số a,b,c luôn có 2 số nằm cùng phía với 1. Không mất tính tổng quát, giả sử b và c nằm cùng phía với 1 ta có:

$$(b - 1)(c - 1) \geq 0$$

Vì vậy ta có được bất đẳng thức sau:

$$b^2 + c^2 \leq b^2 + c^2 + (b - 1)(c - 1) = 1 + (b + c - 1)^2 = 1 + (2 - a)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\frac{b^2}{b^2 - 2b + 4} + \frac{c^2}{c^2 - 2c + 4} \geq \frac{(b + c)^2}{(b^2 + c^2) - 2(b + c) + 8} \geq \frac{(3 - a)^2}{1 + (2 - a^2) - 2(3 - a) + 8} = \frac{(3 - a)^2}{a^2 - 2a + 7}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(3 - a)^2}{a^2 - 2a + 7} + \frac{a^2}{a^2 - 2a + 4} \geq 1$$

Sau khi khai triển rút gọn ta được bất đẳng thức sau:

$$(a - 1)^2(a^2 - 4a + 8) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi a

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Cách 2. Ngoài cách sử dụng Nguyên lý Dirichlet thì vẫn còn 1 cách giải khác thú vị hơn đó là kỹ thuật nhân với 1 biểu thức của anh Lê Ngọc Nghĩa. Tôi xin đưa ra cách giải dưới đây để các bạn tham khảo thêm.

Nhân cả 2 vế bất đẳng thức với $a^2 - 2a + 4 + b^2 - 2b + 4 + c^2 - 2c + 4$ và rút gọn ta được :

$$\sum \frac{a^2 (b^2 + c^2 - 2b - 2c + 8)}{a^2 - 2a + 4} \geq 6$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$b^2 + c^2 - 2b - 2c + 8 \geq \frac{1}{2}(b+c)^2 - 2(b+c) + 8 = \frac{1}{2}(3-a)^2 - 2(3-a) + 8 = \frac{1}{2}(a^2 - 2a + 13)$$

Tương tự:

$$c^2 + a^2 - 2c - 2a + 8 \geq \frac{1}{2}(b^2 - 2b + 13)$$

$$a^2 + b^2 - 2a - 2b + 8 \geq \frac{1}{2}(c^2 - 2c + 13)$$

Vì vậy , ta có được bất đẳng thức sau:

$$\sum \frac{a^2 (b^2 + c^2 - 2b - 2c + 8)}{a^2 - 2a + 4} \geq \sum \frac{a^2 (a^2 - 2a + 13)}{2(a^2 - 2a + 4)} = \sum \frac{a^2}{2} + \sum \frac{9a^2}{2(a^2 - 2a + 4)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\sum \frac{a^2}{a^2 - 2a + 4} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a^2 - 2\sum a + 12} = \frac{9}{\sum a^2 + 6}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta thu được:

$$VT \geq \frac{1}{2} \left(\sum a^2 + \frac{81}{\sum a^2 + 6} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum a^2 + 6 + \frac{81}{\sum a^2 + 6} \right) - 3 \geq 6$$

Từ đây việc chứng minh bất đẳng thức hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 7. [USA MO 2003] Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a,b,c là các số thực dương.

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Định hướng lời giải:

Do bất đẳng thức trên thuần nhất với các biến a,b,c nên ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành:

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1} \leq 2 + \left[3 - \frac{(b+1)^2}{3b^2-2b+1} \right] + \left[3 - \frac{(c+1)^2}{3c^2-2c+1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1} \leq 2 + \frac{2(2b-1)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{2(2c-1)^2}{3c^2-2c+1}$$

Trong 3 luôn có 2 số nằm cùng phía so với $\frac{1}{3}$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $\left(b - \frac{1}{3}\right) \left(c - \frac{1}{3}\right) \geq 0$ ta có:

$$b^2 + c^2 \leq b^2 + c^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right) \left(c - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \left(b + c - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\frac{(2b-1)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{(2c-1)^2}{3c^2-2c+1} \geq \frac{(2b+2c-2)^2}{3(b^2+c^2)-2(b+c)+2} \geq \frac{4a^2}{3\left[\frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2\right] - 2(1-a) + 2} = \frac{12a^2}{9a^2-6a+5}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1} \leq 2 + \frac{24a^2}{9a^2-6a+5}$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta được:

$$(3a-1)^2 (15a^2-6a+5) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với mọi c

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = \frac{1}{3}$ ■

Bài Toán 8. [Lê Khánh Sỹ] Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2b + b^2c + c^2a = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 1 \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^3b + b^3c + c^3a)}$$

Định hướng lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^3b + b^3c + c^3a)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^3b + b^3c + c^3a)} &\leq b(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{a^3b + b^3c + c^3a}{b} \\ &= a^2b + b^3 + bc^2 + a^3 + b^2c + \frac{c^3a}{b} \end{aligned}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$c^3 + c^2a \geq bc^2 + \frac{c^3a}{b} \Leftrightarrow c^2(c-b)(b-a) \geq 0$$

Từ đây, việc chứng minh bất đẳng thức hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ ■

Bài Toán 9. [Lê Khánh Sỹ] Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng khi đó ta có

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)}$$

Định hướng lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c . Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{abc(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{abc(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)} &\leq ac(ab+bc+ca) + b(ab^2+bc^2+ca^2) \\ &= a^2bc + abc^2 + a^2c^2 + ab^3 + b^2c^2 + a^2bc \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$a^2b^2 + ab^2c \geq ab^3 + a^2bc \Leftrightarrow ab(c-b)(b-a) \geq 0$$

Hoàn tất việc chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c$ ■

Bài Toán 10. [VMO 1996] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

Định hướng lời giải:

Dựa trên nguyên lý Dirichlet trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ luôn có 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $(b-1)(c-1) \geq 0$ ta có:

$$c(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow c \geq ac + bc - abc$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh :

$$a + b \geq ab + abc$$

Theo giả thiết:

$$ab + bc + ca + abc = 4$$

Suy ra:

$$c = \frac{4-ab}{a+b+ab}$$

Thay $c = \frac{4-ab}{a+b+ab}$ vào bất đẳng thức đã cho ta có Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a + b \geq ab \left(1 + \frac{4-ab}{a+b+ab}\right) \Leftrightarrow (a+b)(a+b+ab) \geq ab(4+a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 11. [Nguyễn Việt Hùng] Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 8(ab + bc + ca) \leq 27$$

Lời giải:

Trong 3 số a, b, c luôn có 2 số nằm cùng phía với 1. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $(a-1)(b-1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow ab \geq a+b-1 = 2-c$$

Bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 8(ab+bc+ca) &= (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] + c^3 + 8[(a+b)c + ab] \\ &\leq (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] + c^3 + 8[(a+b)c + \frac{(a+b)^2}{4}] \\ &\leq (3-c)[(3-c)^2 - 3(2-c)] + c^3 + 8\left[(3-c)c + \frac{(3-c)^2}{4}\right] = 27 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b = c = 1$ ■

Bài Toán 12. [MOSP 2005] Cho $a, b, c \geq 0$ và không đồng thời bằng 0, thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải.

Từ điều kiện $ab+bc+ca = 1$ ta có được: $1 \geq ab, 1 \geq bc, 1 \geq ca$

Trong 3 số dương a, b, c bất kỳ luôn có 2 số nằm cùng phía so với 1, ta giả sử 2 số đó là a, b . Từ đó suy ra:

$$(a-1)(b-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+ab \geq a+b$$

$$\Rightarrow 2 \geq 1+ab \geq a+b$$

Ta có: $ab+bc+ca = 1 \Rightarrow c = \frac{1-ab}{a+b} \geq 0$

Thay $c = \frac{1-ab}{a+b}$ vào bất đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{1+b^2} + \frac{a+b}{1+a^2} &\geq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} &\geq \frac{5}{2(a+b)} \end{aligned}$$

Theo $AM - GM$ ta có:

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} = 1 - \frac{b^2}{1+b^2} + 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \geq 1 - \frac{b}{2} + 1 - \frac{a}{2} = 2 - \frac{a+b}{2}$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+b)^2} + 2 - \frac{a+b}{2} &\geq \frac{5}{2(a+b)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{2}{a+b} - \frac{1}{2} &\geq \frac{5}{2(a+b)^2} \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2}$, bất đẳng thức trên trở thành:

$$x^3 + 2x - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2(2x-1) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi $x \geq \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi: $a = b = 1, c = 0$ và các hoán vị tương ứng ■

4 Bài tập Rèn luyện

Bài Toán 13. [Romania TST 2006] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Bài Toán 14. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$$

Bài Toán 15. [Japan MO 1997] Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương.

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Bài Toán 16. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a+1)(b+1)(c+1)$$

Bài Toán 16. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + 1 = 4xyz$. Chứng minh rằng:

$$xy + yz + zx \geq x + y + z$$