

VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỪ DIỄN ĐÀN AoPS

TRẦN QUANG HÙNG, NGUYỄN BẢO NGỌC
(Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Tóm tắt

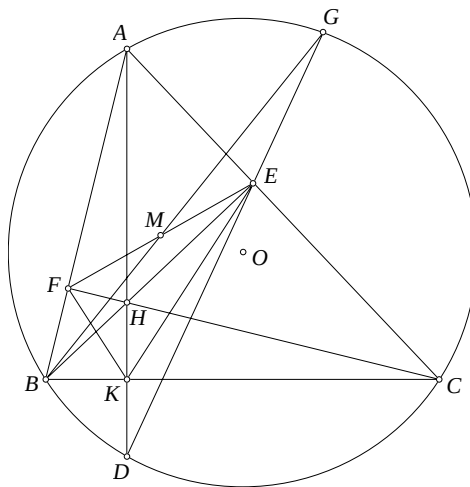
Bài viết này là về một bài toán trên diễn đàn AoPS và trình bày các ứng dụng của nó với các công cụ hình học thuần túy.

1. Mở đầu

Trên diễn đàn AoPS có một bài toán rất thú vị như sau (kí hiệu của bài toán đã được sửa lại để phù hợp hơn với bài viết)

Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của hai đường cao BE, CF ; AH cắt (O) tại D khác A ; DE cắt (O) tại G khác D . Chứng minh rằng BG chia đôi EF .

Lời giải sau là ý tưởng của Jeck Lim, nick name là oneplusone trên diễn đàn AoPS.



Lời giải. Gọi K là giao điểm của AH và BC . Ta dễ dàng chứng minh được K là trung điểm của HD và hai tam giác EFB và EHK đồng dạng. Gọi M là trung điểm của EF , ta có

$$\frac{EF}{HE} = \frac{BF}{HK} \text{ hay } \frac{EF}{2HE} = \frac{BF}{2HK}$$

hay

$$\frac{FM}{HE} = \frac{BF}{HD}.$$

Kết hợp với điều kiện $\angle BFM = \angle DHE$, ta suy ra hai tam giác BFM và DHE đồng dạng. Do đó

$$\angle FMB = \angle HDE = \angle FBG.$$

Vậy B, M, G thẳng hàng.

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc dùng kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh" trong lời giải bài toán trên rất hay, nó giúp chúng ta có nhiều cách để phát triển và mở rộng bài toán này.

2. Các mở rộng

Trong bài toán trên E, F chính là các giao điểm của đường tròn đường kính BC với các cạnh CA, AB . Vậy chúng ta thử thay đường tròn đường kính BC thành một đường tròn bất kỳ, ta sẽ có bài toán sau:

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F ; BE giao với CF tại H ; AH cắt (O) tại P khác A ; PE cắt (O) tại R khác P . Chứng minh rằng BR chia đôi EF .

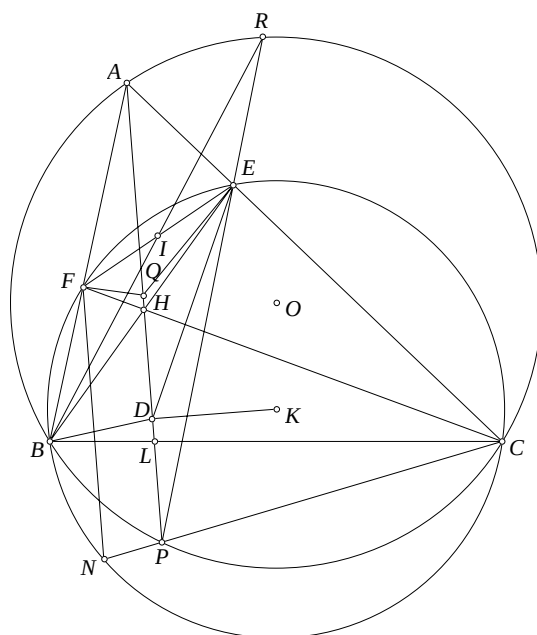
Lời giải. Gọi D là hình chiếu của K lên AH . Lấy điểm N đối xứng với F qua DK . Suy ra N thuộc (K) . Vì

$$\angle BCP = \angle BAP = \angle BFN = \angle BCN$$

nên C, P, N thẳng hàng. Gọi AH cắt BC tại L và Q đối xứng với P qua D . Ta có

$$\angle FQA = \angle QFN = \angle FNC = \angle APC = \angle ABC$$

nên tứ giác $BFQL$ nội tiếp.



Tương tự như trên tứ giác $CEQL$ nội tiếp nên tứ giác $AEQF$ nội tiếp. Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được hai tam giác EFB và EQD đồng dạng. Gọi I là trung điểm EF . Ta sẽ có hai tam giác IFB và EQP đồng dạng. Suy ra

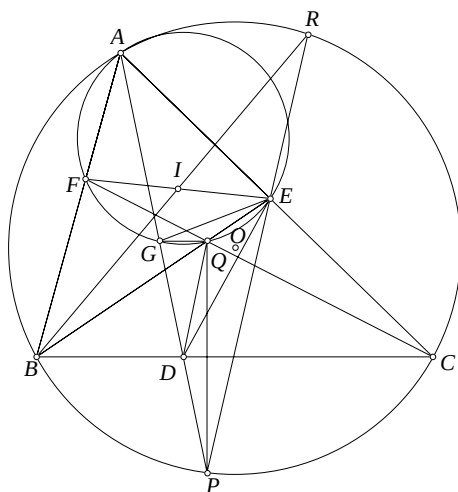
$$\angle FBI = \angle EPQ = \angle ABR.$$

Vậy BR đi qua I chia đôi EF . □

Nhận xét. Lời giải trên cũng sử dụng kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh". Tuy nhiên rõ ràng là trong bài toán mở rộng nó đã được dùng khéo léo để vận dụng hết các dữ kiện mở rộng của bài toán.

Trong bài toán gốc, ta có thể coi H nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua BC . Vậy ta thử thay thế điểm H thành điểm bất kỳ trên đường tròn này, ta sẽ có kết quả rất thú vị như sau:

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . P thuộc cung nhỏ BC sao cho nếu Q đối xứng P qua BC thì Q nằm trong tam giác ABC . QB, QC lần lượt cắt CA, AB tại E, F ; PE cắt (O) tại R khác E . Chứng minh rằng BR chia đôi EF .



Lời giải. Gọi D là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và BC . Ta dễ có tứ giác $AEQF$ nội tiếp nên

$$\angle EQC = \angle BAC = \angle EDC$$

suy ra tứ giác $EQDC$ nội tiếp. Từ đó

$$\angle BAD = \angle BED = \angle QCD = \angle DCP = \angle BAP$$

vậy ta thu được A, D, P thẳng hàng. Gọi G đối xứng P qua D , từ $GQ \parallel BC$ suy ra

$$\angle DGQ = \angle GDB = \angle AEB$$

vì vậy tứ giác $AEQG$ nội tiếp. Từ đó dễ có

$$\angle EGD = \angle EFB$$

và

$$\angle FBE = \angle GDE.$$

Vậy hai tam giác EFB và EDG đồng dạng. Gọi I là trung điểm EF suy ra tam giác IFB và EGP đồng dạng. Vậy ta thu được

$$\angle FBI = \angle GPE = \angle ABR$$

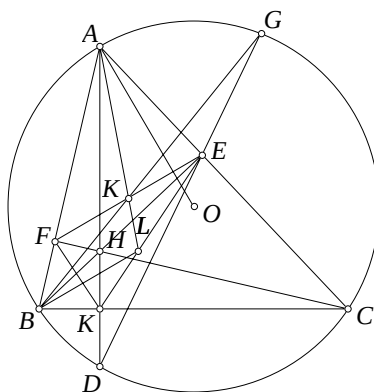
nên BR đi qua I chia đôi EF . □

Nhận xét. Một lần nữa ta thấy kỹ thuật đồng dạng "gấp đôi và chia đôi cạnh" lại được sử dụng một cách khéo léo để khai thác các giả thiết mở rộng. Hai bài toán trên cho chúng ta hai mở rộng khác nhau của cùng một bài toán. Các cách làm này sẽ còn gặp lại trong nhiều các vấn đề khác nữa.

3. Một số ứng dụng của bài toán gốc và các mở rộng

Bài toán gốc và bài toán mở rộng có khá nhiều ứng dụng thú vị, chúng ta hãy tìm hiểu qua các bài toán tiếp theo như sau. Bài toán sau được đề xuất trong [3].

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có các đường cao AK, BE, CF . Gọi D là giao điểm của AK và (O) ; L thuộc KE sao cho $BL \perp OA$; DE cắt (O) tại điểm G khác D . Chứng minh rằng AL và BG cắt nhau tại trung điểm EF .



Lời giải. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của EF . Theo bài toán 1 thì BG đi qua M . Mặt khác ta có $EF \perp OA$ nên $BL \parallel EF$. Vì BG đi qua trung điểm M của EF nên $B(EF, GL) = -1$. Từ hàng điều hòa cơ bản ta cũng có

$$E(BA, FK) = -1$$

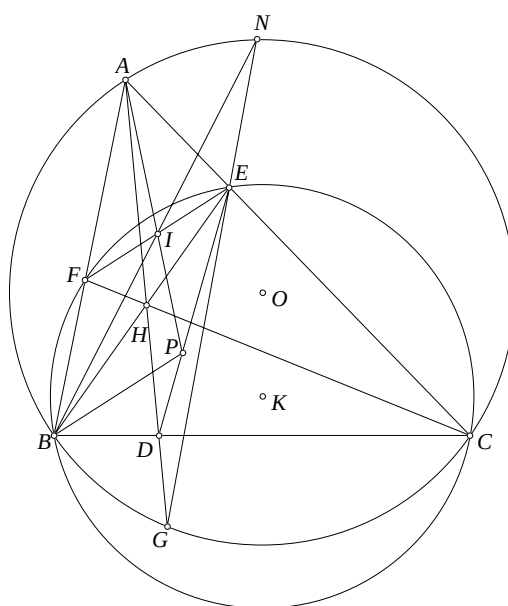
nên

$$B(EF, GL) = E(BA, FK).$$

Suy ra A, M, L thẳng hàng. Vậy BL và AG cắt nhau tại trung điểm EF . Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Với ý tưởng sử dụng hàng điều hòa ta sẽ thu được một bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 5. Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt đoạn thẳng CA, AB lần lượt tại E, F khác C, B ; BE giao CF tại H ; AH cắt BC tại D ; AD cắt (O) tại G khác A ; GE cắt (O) tại N khác G ; P thuộc DE sao cho $BP \parallel EF$. Chứng minh rằng BN và AP cắt nhau tại trung điểm EF .

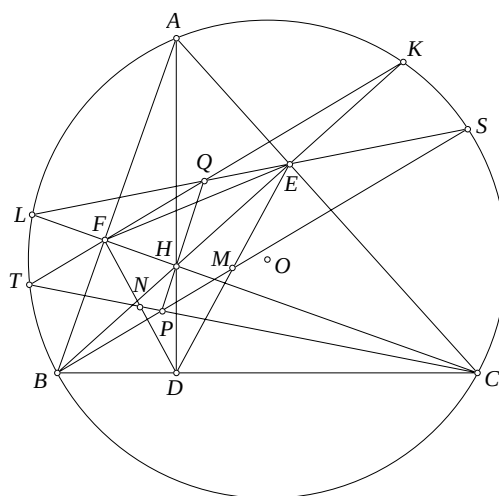


Lời giải. Theo bài toán 4, ta chứng minh được BN đi qua trung điểm I của EF . Do $BP \parallel EF$ nên chùm $B(EF, NP) = -1$. Kết hợp với chùm cơ bản

$$E(BA, FD) = -1 \text{ suy ra } B(EF, NP) = -1 = E(BA, FD).$$

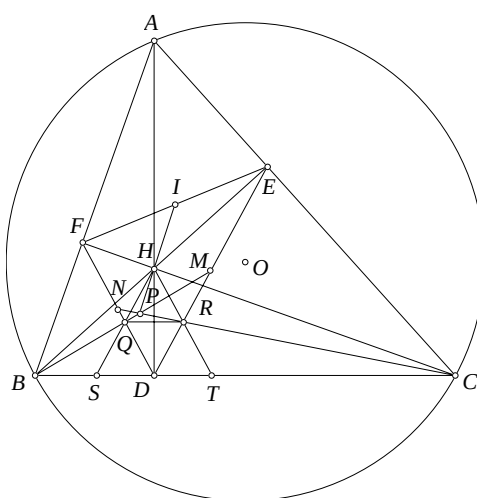
Suy ra giao điểm tương ứng là A, I, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 6. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE và DF ; BM cắt CN tại P . Chứng minh rằng HP chia đôi EF .



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi K, L lần lượt là giao điểm của BE và CF với (O) . Theo bài trước ta dễ thấy LE và BM cắt nhau tại S thuộc (O) . Tương tự KF và CN cắt nhau tại T thuộc (O) . Gọi Q là giao điểm của SL và KT . Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} B & T & L \\ C & S & K \end{pmatrix}$ ta suy ra P, H, Q thẳng hàng. Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $EFLK$ là hình thang nên theo bổ đề hình thang HQ chia đôi EF . Suy ra PH chia đôi EF . Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 7. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H . Trung trực HD cắt DF, DE tại Q, R ; BQ cắt CR tại P . Chứng minh rằng HP chia đôi EF .



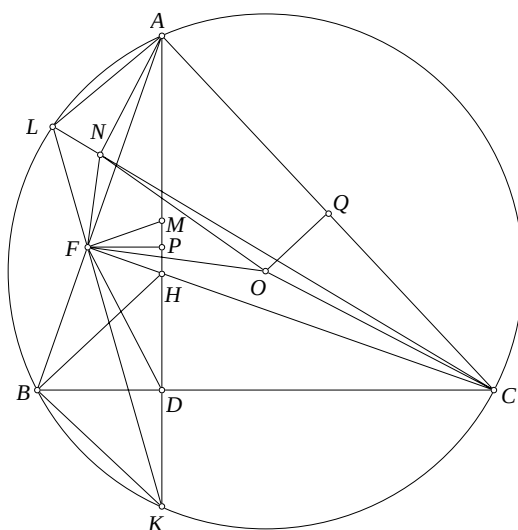
Lời giải. Theo bài trước nếu ta chứng minh được BQ đi qua trung điểm M của EF và CR đi qua trung điểm N của DF thì bài toán được chứng minh. Thật vậy, gọi HQ, HR cắt BC tại S, T . Vì tam giác HSD vuông tại D và tam giác QHD cân tại H suy ra tam giác QSD cân tại Q . Do đó

$$\angle QSD = \angle QDS = \angle EDC$$

nên $HQ \parallel DE$. Mặt khác, dễ thấy Q là trung điểm của HS nên BQ đi qua trung điểm M của DE . Tương tự CR đi qua trung điểm N của DF . Theo bài trước ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Sử dụng phương pháp chiếu song song ta dễ dàng suy ra được bài toán 7 đúng với mọi điểm P bất kỳ trong mặt phẳng thay cho H . Bài toán tổng quát này có thể giải đơn giản chỉ bằng biến đổi diện tích. Các bạn hãy quan tâm tới vấn đề này.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và đường cao AD, CF . Gọi K là giao điểm của AD và (O) ; KF cắt (O) tại L khác K ; đường thẳng qua A vuông góc OC cắt CL tại N . Chứng minh rằng $FN \perp FO$.



Lời giải. Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$. Từ đó suy ra

$$\angle NFO = 90^\circ.$$

Thật vậy, ta dễ dàng chứng minh được

$$\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$$

nên

$$\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO.$$

Gọi AD cắt CF tại H và P là hình chiếu của F lên AD , M đối xứng H qua P . Dễ thấy

$$\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$$

và

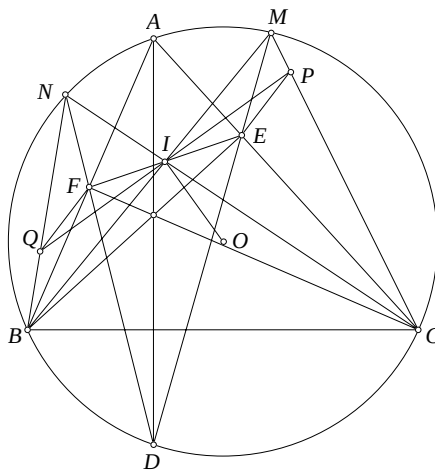
$$\angle FKM = \angle ACN.$$

Do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$. Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số

$$\begin{aligned} \frac{NA}{FA} &= \frac{NA}{LA} \cdot \frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC} \cdot \frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC} \cdot \frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC} \cdot \frac{AC}{MK} \\ &= \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}. \end{aligned}$$

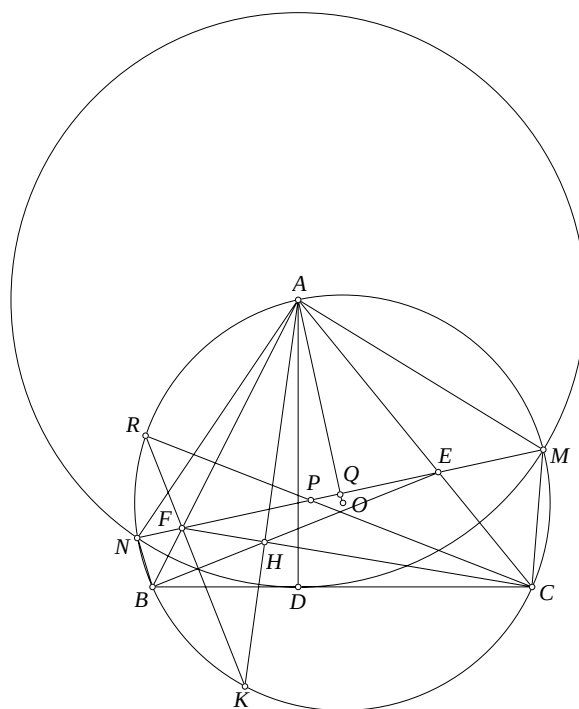
Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 9. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi D là giao điểm AH và (O) ; DE cắt (O) tại M khác D ; I là trung điểm EF ; P thuộc CM sao cho $PI \perp IO$; lấy Q đối xứng P qua I . Chứng minh rằng DF và BQ cắt nhau trên (O) .



Lời giải. Theo bài toán 1 thì BM đi qua I . Gọi DF cắt (O) tại điểm N khác D . Vẫn theo bài toán 1 thì CN đi qua I . Trong tứ giác $BCMN$ có BM cắt CN tại I . Mặt khác đường thẳng qua I vuông góc OI cắt CM tại P . Theo bài toán con bướm thì đối xứng của P qua I là Q thuộc BN . Từ đó BQ và DF cắt nhau tại N thuộc (O) . Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD . Đường tròn (A, AD) cắt (O) tại M, N với M, B khác phía AC ; MN cắt CA, AB tại E, F ; BE cắt CF tại H ; AH cắt (O) tại K ; KF cắt (O) tại R khác K ; CR cắt MN tại P . Chứng minh rằng $2PQ = |ME - NF|$.

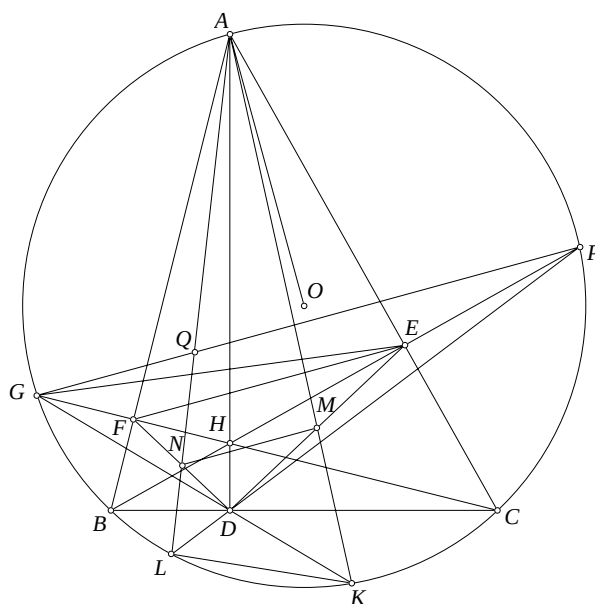


Lời giải. Ta có tam giác AMN cân nên $\angle NBA = \angle NMA = \angle ANM$. Từ đó $AN^2 = AF \cdot AB$. Tương tự $AM^2 = AE \cdot AC$. Do $AM = AN$ nên $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Từ đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Theo bài toán 3 thì CR chia đôi EF suy ra Q là trung điểm của EF . Mà Q là trung điểm MN nên

$$|ME - NF| = |PM - PN| = |QN - QM + 2PQ| = 2PQ.$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 11. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H ; CH cắt (O) tại G khác C ; GD cắt (O) tại K khác G ; N là trung điểm DF ; AN cắt (O) tại L khác A . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KLN chia đôi DE .



Lời giải. Gọi M là trung điểm của DE . Ta sẽ chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KLN đi qua M .

Thật vậy, theo bài toán 1 thì AK đi qua M . Gọi BH cắt (O) tại P khác B . Cũng theo bài toán 1 thì LD đi qua P là đối xứng của H qua CA . Từ đó suy ra

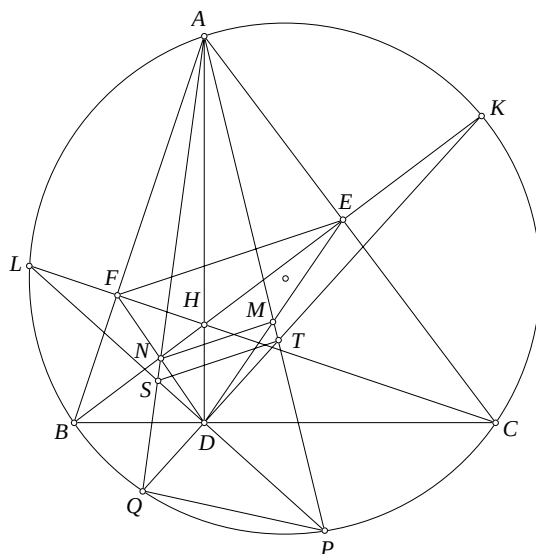
$$AG = AH = AP \Rightarrow GP \perp OA \perp EF \Rightarrow GP \parallel EF \parallel MN.$$

Gọi AL cắt GP tại Q . Ta có

$$\begin{aligned} \angle MNA &= \angle AQP = \angle AGQ + \angle QAG = \angle APG + \angle QAG \\ &= \angle AKG + \angle GKL = \angle AKL. \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $MKNL$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 12. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF . AM, AN lần lượt cắt (O) tại P, Q khác A . DP, DQ lần lượt cắt AM, AN tại S, T . Chứng minh rằng $ST \parallel MN$.



Lời giải. Theo bài toán trên ta đã chứng minh được tứ giác $PQNM$ nội tiếp. Gọi K, L đối xứng với H qua CA, AB thì K, L thuộc (O) . Theo bài toán 1 thì DQ đi qua K và DP đi qua L . Vì $AK = AH = AL$ nên tam giác AKL cân. Từ đó

$$\begin{aligned}\angle QSP &= \angle SAP + \angle SPA = \angle SAP + \angle AKL \\ &= \angle SAP + \angle ALK = \angle SAP + \angle AQT = \angle QTP.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $PQST$ nội tiếp. Vậy từ hai tứ giác $PQNM$ và $PQST$ nội tiếp, ta dễ dàng suy ra $ST \parallel MN$. $\square$

Với kĩ thuật gấp đôi và chia đôi cạnh, ta có thể tìm ra được nhiều bài toán hình học hay. Với cách nghĩ đơn giản và cổ điển, hầu hết học sinh có thể nghiên cứu và sử dụng nó. Phải chăng, bài toán càng tinh túy khi phương pháp giải càng sơ cấp?

Tài liệu tham khảo

- [1] Topic Divide in two eqal segments. www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=386417
- [2] Lim Jeck www.limjeck.com
- [3] Topic Midpoint www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=389720