

Trường Xuân Toán học miền Nam 2017
VIỆT NAM TST MOCK TEST

Thời gian làm bài: 240 phút.

1 Đề thi ngày một (ngày 23/02/2017)

Bài 1.

Tìm hằng số k nhỏ nhất sau cho bất đẳng thức

$$k(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b + c)^2,$$

luôn đúng với mọi số thực a, b, c bất kỳ.

Bài 2.

Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

- i. $2 \leq k \leq 2017$.
- ii. Tồn tại cách phân hoạch X thành hai tập con $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{1009}\}$ và $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{1009}\}$ sao cho $|a_i - b_i| \in \{1, k\}$.
- iii. Với mọi cách phân hoạch thỏa mãn ii) thì tổng $T = \sum_{i=1}^{1009} |a_i - b_i|$ có tận cùng là 9.

Bài 3.

Cho đường tròn (O) cùng hai điểm B, C cố định trên (O) và điểm A di động trên (O) sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F . BI, CI lần lượt cắt EF tại M, N .

1. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.
2. Trên BM, CN lần lượt lấy P, Q sao cho $CP \parallel BQ \parallel AI$. Gọi R là giao điểm khác I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN, \triangle IPQ$. Chứng minh rằng R di động trên đường tròn cố định khi A thay đổi

2 Đề thi ngày hai (ngày 26/02/2017)

Bài 4.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức

$$x_0 = 1, x_n = -2017 \left(\frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n} \right) \text{ với } 1 \leq n \leq 2017.$$

Hỏi có bao nhiêu chỉ số i mà $0 \leq i \leq 2017$ sao cho $|x_i|$ chia hết cho 3?

Bài 5.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) có trực tâm H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Đường tròn (MNP) lần lượt cắt $(MCA), (MAB)$ tại điểm thứ hai là E, F . Giả sử ME, MF theo thứ tự cắt CA, AB tại K, L .

1. Chứng minh rằng OH vuông góc KL tại S .
2. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; Y, Z lần lượt là hình chiếu của B, C lên CA, AB . Gọi X là giao điểm của KZ và LY . Chứng minh rằng A, G, S, X cùng nằm trên một đường tròn

Bài 6.

Cho p là số nguyên tố. Ta nói số nguyên dương n là thú vị nếu

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$

với f, g là các đa thức với hệ số nguyên nào đó.

1. Chứng minh rằng số $p^p - 1$ là số thú vị.
2. Với số nguyên tố p nào thì $p^p - 1$ là số thú vị nhỏ nhất?

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Bài 1. *Tìm hằng số k nhỏ nhất sau cho bất đẳng thức*

$$k(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b + c)^2, \quad (1)$$

luôn đúng với mọi số thực a, b, c bất kỳ.

Lời giải. Cho $a = b = c = t$ thì (1) trở thành

$$k(t^2 + 1)^3 \geq 9t^2.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$(t^2 + 1)^3 = \left(t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3 \geq \frac{27}{4}t^2,$$

do đó $k \geq \frac{4}{3}$. Ta sẽ chứng minh $k = \frac{4}{3}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{3}{4}(a + b + c)^2. \quad (2)$$

Thay (a, b, c) bởi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a, \frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{2}}c\right)$ thì (2) trở thành

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2. \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \frac{1}{2}(b + c)^2\right],$$

cho nên ta chỉ cần chứng minh

$$(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3 + \frac{3}{2}(b + c)^2,$$

thu gọn thành

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2) + b^2c^2 + 1 \geq 3bc.$$

Hiển nhiên đúng vì $b^2 + c^2 \geq 2bc$ và $b^2c^2 + 1 \geq 2bc$.

Ngoài ra với $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì bất đẳng thức (2) trở thành đẳng thức điều này cho phép ta kết luận $k_{\min} = \frac{4}{3}$. ■

Nhận xét Ngoài lời giải trên thì (3) vẫn còn rất nhiều những hướng tiếp cận khác, dưới đây là một chứng minh khá thú vị

$$P = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) - 3(a + b + c)^2 \\ = 2 \sum (ab - 1)^2 + c^2(a^2 - 1)(b^2 - 1) + \frac{(c^2a + a - b - c)^2 + (c^2 + 2)(bc - 1)^2}{c^2 + 1} \geq 0.$$

Theo nguyên lý Dirichlet ta có thể giả sử $c^2(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$ dẫn đến $P \geq 0$.

Từ (3) với chú ý $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, ta được

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca). \quad (4)$$

Đây chính đề thi Olympic toán Châu Á Thái Bình Dương (APMO) 2004.

Cũng từ (3) và (4) câu hỏi được đặt ra là hằng số k lớn nhất sau đây luôn đúng là bao nhiêu?

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq k(a^2 + b^2 + c^2) + (9 - k)(ab + bc + ca). \quad (5)$$

Câu trả lời của (5) là $k = 4$, tức ta có

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca),$$

hay là

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 8 \geq 5(ab + bc + ca). \quad (6)$$

Đặt $x = ab$, $y = bc$ và $z = ca$ thì (6) trở thành

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z). \quad (7)$$

Ta có thể viết (7) dưới dạng

$$xyz + 2 + 2[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2] \geq x + y + z. \quad (8)$$

Như vậy liệu có thể thay số 2 ở (8) bởi số hằng số k nhỏ nhất nào để bất đẳng thức sau luôn đúng?

$$xyz + 2 + k[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2] \geq x + y + z.$$

Từ đẳng thức

$$P = xyz + 2 + k[(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2] - x - y - z \\ = \frac{2kz(x - 1)(y - 1) + k^2(x - y)^2 + (kx + ky + z - 2k - 1)^2 + (z - 1)^2(2k^2 - 1)}{2k}.$$

Ta sẽ thấy $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ là giá trị cần tìm.

Bài 2. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương k thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

i. $2 \leq k \leq 2017$.

ii. Tồn tại cách phân hoạch X thành hai tập con $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{1009}\}$ và $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{1009}\}$ sao cho $|a_i - b_i| \in \{1, k\}$.

iii. Với mọi cách phân hoạch thỏa mãn ii) thì tổng $T = \sum_{i=1}^{1009} |a_i - b_i|$ có tận cùng là 9.

Lời giải. Ta có nhận xét rằng với mọi k thì luôn tồn tại phân hoạch thỏa mãn ii) vì chẳng hạn, ta có thể xét A là tập hợp số chẵn và B là tập hợp các số lẻ.

Gọi m là số lần có hiệu là k thì $T = (1009 - m) \cdot 1 + m \cdot k = 1009 + (k - 1)m$. Do đó, ta cần tìm điều kiện của k sao cho mọi phân hoạch thỏa mãn ii) thì $(k - 1)m$ chia hết cho 10.

Trước hết, ta thấy k chia 5 dư 1 luôn thỏa mãn. Thật vậy,

1. Nếu $k \equiv 1 \pmod{10}$ thì hiển nhiên $10 \mid k - 1$ và iii) thỏa.
2. Nếu $k \equiv 6 \pmod{10}$ thì k chẵn. Khi đó, ta cần chứng minh m chẵn. Điều này đúng vì có thể viết $m = m_1 + m_2$ với m_1, m_2 chỉ số cặp cùng chẵn, cùng lẻ và có hiệu là k . Khi đó, rõ ràng trong X , số lượng số chẵn và lẻ là bằng nhau.

Đồng thời các cặp (a_i, b_i) có $|a_i - b_i| = 1$ cũng chứa đúng một số ở mỗi loại số chẵn, số lẻ. Suy ra $m_1 = m_2$ hay m là số chẵn.

Do đó, tất cả các số dạng này đều thỏa mãn điều kiện đã cho. Ta xét trường hợp k không có dạng trên, ta sẽ chứng minh rằng các số đó sẽ không thỏa mãn.

1. Xét k lẻ và $k - 1$ không chia hết cho 5 thì chọn phân hoạch gồm đúng một cặp $(1, k + 1)$ có hiệu là k ; còn lại chia thành các cặp số liên tiếp sẽ thỏa mãn

ii). Khi đó, $m = 1$ và $T = 1008 + k$, muốn số này có tận cùng là 9 thì k phải chia 10 dư 1, không thuộc trường hợp đang xét.

2. Xét k chẵn và $k - 1$ không chia hết cho 5 thì $k - 1$ là số lẻ không chia hết cho 5 nên cần có m chia hết cho 10. Ta xét phân hoạch gồm đúng hai cặp là $(1, k + 1), (2, k + 2)$ và còn lại thì chia thành các cặp số liên tiếp. Khi đó $m = 2$ và $(k - 1)m$ không chia hết cho 10.

Từ đó, ta thấy rằng điều kiện cần và đủ để k thỏa mãn đề bài là k chia 5 dư 1. Từ 2 đến 2017 có tất cả 403 số như thế nên đáp số cần tìm là 403. ■

Nhận xét Đề bài ban đầu có cụm từ "**cùng viết theo thứ tự tăng dần**" dẫn đến tập hợp phân hoạch thỏa mãn ii) bị giảm đi rất nhiều và rơi vào trường hợp đặc biệt.

Cụ thể là bằng cách nhận xét:

Vì $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1009}$ và $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{1009}$ nên nếu giả sử $a_1 < b_1$ thì dẫn đến $a_1 = 1$ và $b_1 - a_1 = k$ hay $b_1 = k + 1$. Suy ra

$$a_2 = 2, a_3 = 3 \dots, a_k = k.$$

Lập luận tương tự, ta sẽ thấy mọi phân hoạch thỏa mãn ii) đều sẽ có dạng: $|a_i - b_i|$ sẽ gồm nhiều dãy k số liên tiếp bằng k , còn lại thì bằng 1.

Khi đó, nếu gọi a là số dãy k số liên tiếp có chênh lệch bằng k và b là số cặp có hiệu là 1 thì $ak + b = 1009$ và tổng $T = ak^2 + b$ phải có tận cùng là 9. Điều này dẫn đến

$$a(k^2 - k) \text{ chia hết cho } 10.$$

Do tính chất trên phải đúng với mọi phân hoạch nên có thể xét riêng khi $a = 1$ và có $k^2 - k$ chia hết cho 10.

Đến đây, ta đếm được 1410 số thỏa mãn.

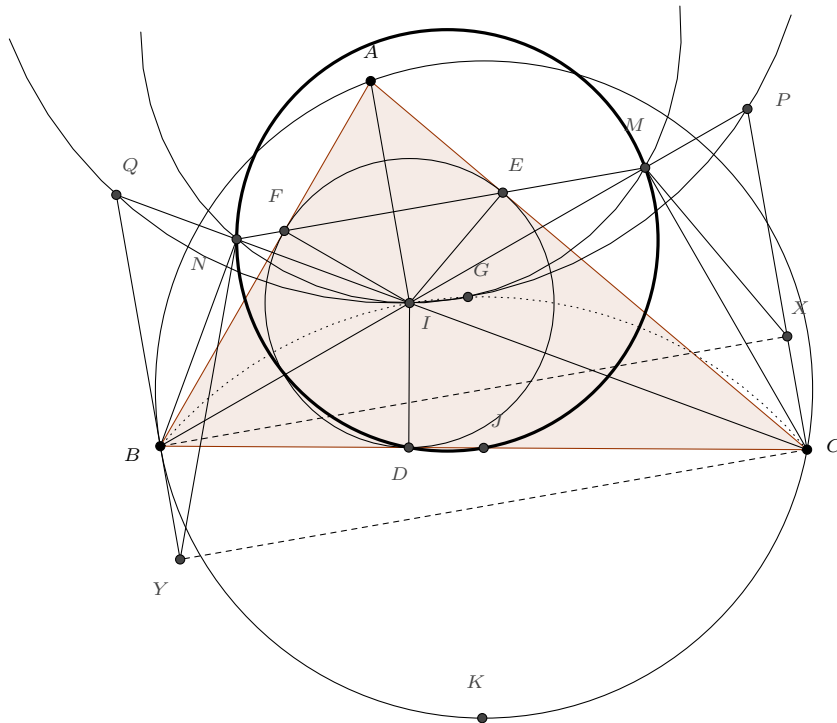
Bài 3. Cho đường tròn (O) và B, C cố định trên (O) và điểm A di động trên (O) sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F . BI, CI lần lượt cắt EF tại M, N .

1. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.
2. Trên BM, CN lần lượt lấy P, Q sao cho $CP \parallel BQ \parallel AI$. Gọi R là giao điểm khác I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN, \triangle IPQ$. Chứng minh rằng R di động trên đường tròn cố định khi A thay đổi

Lời giải. 1) Xét hình vẽ như bên dưới, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Ta có

$$\angle MEC = \angle FEA = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ - (\angle BIC - 90^\circ) = 180^\circ - \angle BIC = \angle MIC$$

nên $CIEM$ nội tiếp.



Do đó, $\angle CMI = \angle CEI = 90^\circ$ nên $CM \perp BI$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $BN \perp CI$.

Suy ra (DMN) là đường tròn Euler của $\triangle BIC$ nên nó đi qua trung điểm BC cố định. Ta có đpcm.

2) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của C, B lên BQ, CP .

Ta có $BY \parallel CX$ nên $\angle YBX = \angle BXC = \angle XCY = \angle CYB = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BXCY$ là hình chữ nhật.

Ngoài ra, B, C, M, N, X, Y cùng thuộc (BC) và $MN \parallel BX \parallel CY$ nên $BXMN, CYNM$ là hình thang cân.

Ta cần chứng minh

$$\frac{QN}{QC} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow \frac{BN}{BC} \cdot \frac{YN}{YC} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{XM}{XB} \Leftrightarrow BN \cdot CM = CM \cdot BN \text{ (đúng)}$$

Xét phép vị tự quay tâm R , tỉ số $\frac{RN}{RM} = \frac{RQ}{RP}$, góc $(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RN}) = (\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$, ta được các kết quả

$$M \rightarrow N, P \rightarrow Q, B \rightarrow C$$

nên $\triangle RBC \sim \triangle RMN$ nên $\angle BIC = \angle MIN = \angle MRN = \angle BRC$ dẫn đến $BIRC$ nội tiếp.

Mặt khác, ta lại có (BIC) có tâm K là điểm chính giữa cung BC nhỏ của (O) và bán kính là KB nên đây là đường tròn cố định.

Vậy R di động trên đường tròn (K, KB) cố định. ■

Bài 4. Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức

$$x_0 = 1, x_n = -2017 \left(\frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n} \right) \text{ với } 1 \leq n \leq 2017.$$

Hỏi có bao nhiêu chỉ số i mà $0 \leq i \leq 2017$ sao cho $|x_i|$ chia hết cho 3?

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy, ta có

$$-\frac{nx_n}{2017} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Thay n bởi $n - 1$ thì

$$-\frac{(n-1)x_{n-1}}{2017} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức, ta có

$$-\frac{nx_n + (n-1)x_{n-1}}{2017} = x_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \frac{n-2016}{n}x_{n-1}.$$

Suy ra

$$x_1 = -2017 = -C_{2017}^1, x_2 = \frac{2017 \cdot 2016}{2} = C_{2017}^2, x_3 = -\frac{2017 \cdot 2016 \cdot 2015}{3 \cdot 2} = -C_{2017}^3.$$

Từ đó ta dự đoán $x_n = (-1)^n C_{2017}^n$ và có thể chứng minh dễ dàng bằng quy nạp.

Ta cần đếm các chỉ số i mà $|x_i| = C_{2017}^i$ chia hết cho 3. Để thực hiện điều này, ta sẽ đếm các chỉ số i mà C_{2017}^i không chia hết cho 3 thông qua định lý Lucas.

Ta có biểu diễn tam phân của 2017 là: $2017 = \overline{2202201}_{(3)}$. Do $0 \leq i \leq 2017$ nên ta xét biểu diễn tam phân của i là $i = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}_{(3)}$ với $a_i \in \{0, 1, 2\}, i = \overline{1, 7}$.

Theo định lý Lucas thì

$$C_{2017}^i \equiv C_2^{a_1} C_2^{a_2} C_0^{a_3} C_2^{a_4} C_2^{a_5} C_0^{a_6} C_1^{a_7} \pmod{3}.$$

Để số này không chia hết cho 3 thì

$$0 \leq a_1, a_2, a_4, a_5 \leq 2, 0 \leq a_7 \leq 1 \text{ và } a_3 = a_6 = 0.$$

Rõ ràng bằng cách chọn tùy ý này thì luôn thu được một số $i \leq 2017$.

Số cách chọn các giá trị này là $2 \cdot 3^4 = 162$.

Vậy số các chỉ số thỏa mãn là $2018 - 162 = 1856$. ■

Nhận xét Nếu đề bổ sung thêm yêu cầu tìm số chỉ số i để a_i chia hết cho 6 thì cần phải xét thêm trong các số có biểu diễn tam phân thỏa mãn rằng buộc đề bài thì có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ.

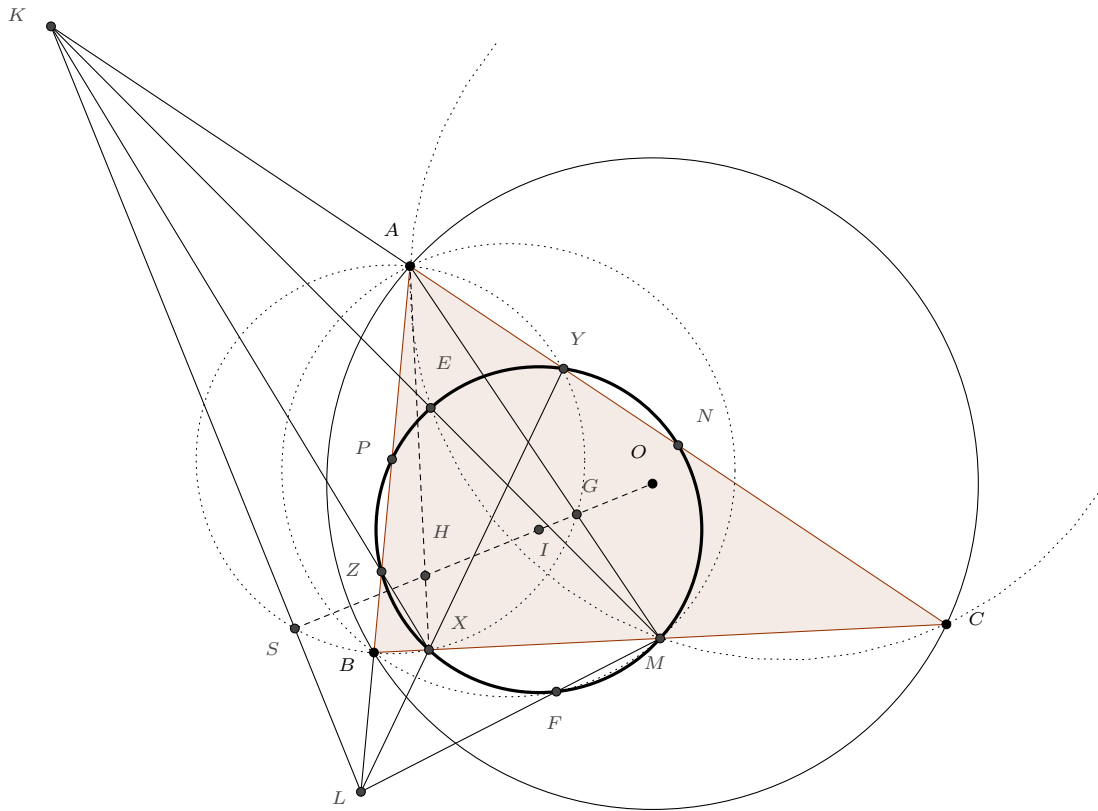
Chú ý rằng số $2017 = \overline{11111100001}_{(2)}$ là số có toàn bộ các số 1 phía trước nên C_{2017}^i chẵn khi có một trong 4 vị trí trong biểu diễn nhị phân của i tương ứng với 0000 là 1 và một số vị trí phía trước bằng 0.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) có trực tâm H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Đường tròn (MNP) lần lượt cắt $(MCA), (MAB)$ tại điểm thứ hai là E, F . Giả sử ME, MF theo thứ tự cắt CA, AB tại K, L .

1. Chứng minh rằng OH vuông góc KL tại S .
2. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; Y, Z lần lượt là hình chiếu của B, C lên CA, AB . Gọi X là giao điểm của KZ và LY . Chứng minh rằng A, G, S, X cùng nằm trên một đường tròn

Lời giải. 1) Gọi I là tâm của đường tròn (MNP) . Ta có

$$P_{K/(O)} = KA.KC = KE.KM = P_{K/(I)}$$



Điều này chứng tỏ rằng K thuộc trục đẳng phương của (I) và (O) . Chứng minh tương tự thì L thuộc trục đẳng phương của (I) và (O) .

Do đó, KL là trục đẳng phương của (I) và (O) . Điều đó chứng tỏ KL vuông góc OI . Mà O, I, H thẳng hàng (định lý về đường thẳng Euler) nên KL vuông góc với OH .

2) Gọi D là hình chiếu của A lên BC và DZ cắt AC tại K' . Ta có

$$P_{K'/(O)} = K'A \cdot K'C = K'Z \cdot KD = P_{K/(I)}$$

nên K' thuộc trục đẳng phương của (I) và (O) , suy ra $K' \equiv K$.

Do đó, ta có K, Z, D thẳng hàng. Chứng minh tương tự L, Y, D thẳng hàng. Từ đó $X \equiv D$. Bây giờ ta kí hiệu R, r lần lượt là bán kính (O) và (I) thì

$$\begin{aligned} P_{S/(O)} &= P_{S/(I)} \\ \Leftrightarrow OS^2 - R^2 &= IS^2 - r^2 \\ \Leftrightarrow (\overline{OS} - \overline{IS})(\overline{OS} + \overline{IS}) &= R^2 - r^2 \\ \Leftrightarrow \overline{OI}(\overline{OH} + \overline{IH} + 2\overline{HS}) &= 3r^2 \text{ (vì } R = 2r) \\ \Leftrightarrow \overline{IH}(3\overline{IH} + 2\overline{HS}) &= 3r^2 \text{ (vì } \overline{OI} = \overline{IH}) \\ \Leftrightarrow 2\overline{HS} \cdot \overline{HI} &= 3(HI^2 - r^2) \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overline{HI} \cdot \overline{HS} = P_{H/(I)} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\overline{HI} \cdot \overline{HS} = 2P_{H/(I)} \\ \Leftrightarrow \overline{HG} \cdot \overline{HS} &= \overline{HA} \cdot \overline{HX} \end{aligned}$$

Vậy A, G, S, X cùng thuộc một đường tròn, ta có đpcm. ■

Bài 6. Cho p là số nguyên tố. Ta nói số nguyên dương n là thú vị nếu

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$

với f, g là các đa thức với hệ số nguyên nào đó.

1. Chứng minh rằng số $p^p - 1$ là số thú vị.

2. Với số nguyên tố p nào thì $p^p - 1$ là số thú vị nhỏ nhất?

Lời giải. 1) Với $p = 2$ thì $p^p - 1 = 3$ nên ta cần chứng minh tồn tại $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ để

$$x^3 - 1 = (x^2 - x + 1)f(x) + 2g(x).$$

Điều này đúng vì có thể chọn $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 - x$.

Xét p là số nguyên tố lẻ, ta ký hiệu $f(x) \cong g(x)$ nếu như tồn tại hai đa thức $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho $f(x) - g(x) = (x^p - x + 1) \cdot u(x) + p \cdot v(x)$.

Ta có các nhận xét sau:

1. Nếu $f(x) \cong g(x)$ và $g(x) \cong h(x)$ thì $f(x) \cong h(x)$.
2. Nếu $f(x) \cong g(x)$ và $h(x) \cong k(x)$ thì $f(x)h(x) \cong g(x)k(x)$ và $f(x) + h(x) \cong g(x) + k(x)$.
3. Nếu $f(x) - g(x)$ chia hết cho đa thức $x^p - x + 1$ hoặc p thì $f(x) \cong g(x)$.
4. Nếu $f(x) \cong g(x)$ thì với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta cũng có $(f(x))^n \cong (g(x))^n$.

Các nhận xét này có thể dễ dàng suy ra được từ định nghĩa.

Ta có $x^p \cong x - 1$ và chú ý rằng $(x - 1)^p - (x^p - 1) = \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i (-1)^i x^i$ và $p \mid C_p^i$ với mọi $1 \leq i \leq p - 1$ nên ta cũng có $(x - 1)^p \cong (x^p - 1)$ dẫn đến

$$x^{p^2} = (x^p)^p \cong (x - 1)^p \cong x^p - 1 \cong x - 2.$$

Chứng minh tương tự $(x^{p^2})^p \cong (x - 2)^p \cong (x - 1 - 1)^p$ hay $x^{p^3} \cong x - 3$.

Từ đó suy ra $x^{p^k} \cong x - k$ với $1 \leq k \leq p - 1$.

Thực hiện tính tích các cặp đa thức ở trên, ta có

$$x^{1+p+\dots+p^{p-1}} \cong x(x - 1) \cdots (x - p + 1).$$

Bổ đề (đa thức Lagrange). Đa thức $P(x) = (x - 1)(x - 2) \cdots (x - p + 1)$ với p nguyên tố lẻ có tất cả các hệ số, trừ hệ số của x^{p-2} và hệ số tự do, thì đều chia hết cho p ; hay nói cách khác $P(x) - (x^{p-1} - 1)$ đều chia hết cho p .

Áp dụng bổ đề này, suy ra

$$x(x - 1) \cdots (x - p + 1) \cong x^p - x \cong -1.$$

Chú ý rằng $1 + p + \dots + p^{p-1} = \frac{p^p - 1}{p - 1}$ nên $x^{\frac{p^p - 1}{p - 1}} \cong -1$. Lấy lũy thừa $p - 1$ hai vế, ta có

$$x^{p^p - 1} \cong 1 \text{ vì } p - 1 \text{ chẵn.}$$

Suy ra tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}[x]$ để

$$x^{p^p - 1} - 1 = (x^p - x + 1)u(x) + pv(x)$$

hay $n = p^p - 1$ là số thú vị. Ta có đpcm.

2) Theo chứng minh ở trên, nếu đặt

$$m = 1 + p + \dots + p^{p-1}$$

thì $n = 2m$ là các số thú vị.

Giả sử với p là số nguyên tố lẻ nào đó mà $p^p - 1$ là số thú vị nhỏ nhất. Chú ý rằng $p^p - 1 = (p - 1)m$ nên phải có $p - 1 \leq 2$ hay $p \leq 3$.

Ta sẽ chứng minh $p = 2$ và $p = 3$ thỏa mãn. Để tiếp tục, ta chứng minh hai nhận xét sau:

- i Với mọi p thì $n = 1$ không phải là số thú vị. Thật vậy, vì giả sử $x \cong 1$, ta sẽ có $x^2 \cong 1$, nhưng $x^2 \cong x - 1 \cong 0$ nên $1 \cong 0$, vô lý.
- ii Nếu có số thú vị n và một số m là số thú vị nhỏ nhất đối với số nguyên tố p thì $m \mid n$. Thật vậy, vì $x^n \cong 1$ và $x^m \cong 1$ và $n \geq m$ nên có thể đặt $m = qm + r$ với $0 \leq r < m$, suy ra $1 \cong x^n = x^{mq+r} = (x^m)^q x^r \cong x^r$. Điều này chứng tỏ $r = 0$ hay n chia hết cho m .

Với $p = 2$, nếu $n = 2$ thú vị thì nó sẽ là số thú vị nhỏ nhất, mà $n = 3$ cũng là số thú vị nên dẫn đến $2 \mid 3$, vô lý. Do đó, $n = 3$ là số thú vị nhỏ nhất nên $p = 2$ thỏa mãn đề bài.

Với $p = 3$, ta đã có $n = 3^3 - 1 = 26$ là số thú vị; ngoài ra, $n = 13$ không là số thú vị vì $x^{13} \cong 1$. Nếu $n = 2$ là số thú vị thì $x^2 \cong 1$ nên $x^3 \cong x$, mà $x^3 \cong x - 1$ nên $x - 1 \cong x$ hay $-1 \cong 0$, vô lý. Do đó, $n = 26$ là số thú vị nhỏ nhất nên $p = 3$ thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả các số nguyên tố cần tìm là $p = 2, p = 3$. ■

Nhận xét Bài toán này đòi hỏi phải định nghĩa lại một quan hệ giữa hai đa thức, tương tự như quan hệ đồng dư trong số học. Để giải quyết bài toán, ta cần dùng nhiều kết quả, tính chất số học một cách khéo léo. Việc biến đổi có phần giống chứng minh quy nạp của định lý Lucas.

Hai đa thức với quan hệ thỏa mãn điều kiện đã cho có hầu hết các tính chất của một đồng dư thức số học thông thường và nhờ đó mà ta có thể khai thác và biến đổi về $p^p - 1$.

Câu b làm ta liên tưởng đến cấp và căn nguyên thủy.

Các lời giải trên, chúng tôi có tham khảo từ các học sinh: Trương Công Cường, Nguyễn Doãn Hoàng Lâm và Đỗ Hoàng Việt.

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày 01/03/2017,

Trường Xuân miền Nam,

Trần Nam Dũng, Lê Bá Khánh Trình,

Lê Phúc Lữ, Nguyễn Văn Huyện, Trần Minh Ngọc.