

# Từ bài toán trên báo toán tuổi thơ 2 tới đề thi chọn đội tuyển KHTN năm 2013

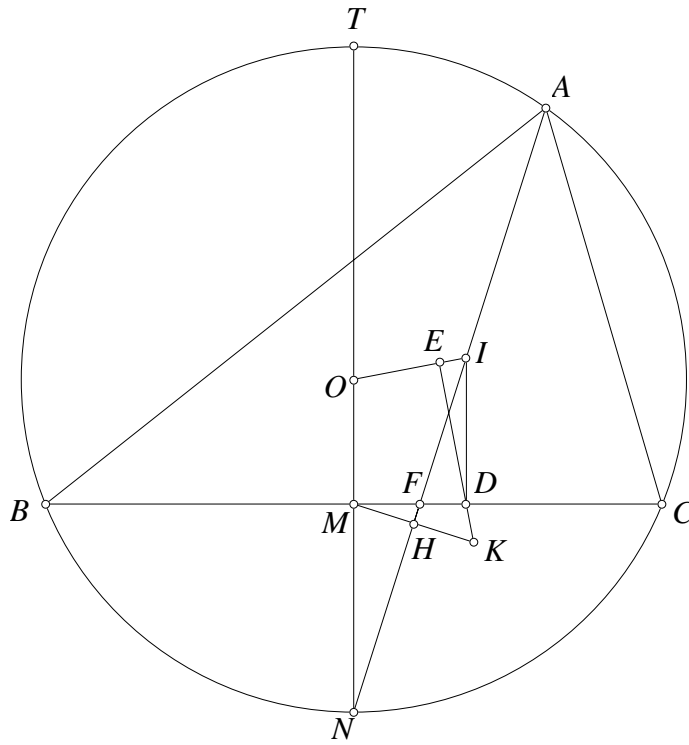
Trần Quang Hùng

## Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán trên báo TTT2 dẫn tới một mở rộng là bài toán thi chọn đội tuyển toán THPT chuyên KHTN vòng 2 năm 2013 với các phép chứng minh hình học thuần túy đồng thời áp dụng các bài toán đó trong vào bài toán khác nhau. Bài viết cũng đưa ra một mở rộng hơn nữa cho bài toán này. Nội dung chính của bài viết này tham khảo [4].

Trên báo toán tuổi thơ 2 số 123+124 năm 2013 mục giải toán qua thư có bài toán như sau của thầy **Nguyễn Minh Hà**

**Bài toán 1.** Cho tam giác  $ABC$ , với tâm ngoại tiếp  $O$  và tâm nội tiếp  $I$ .  $D$  là hình chiếu của  $I$  lên  $BC$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $K$  là điểm đối xứng của  $M$  qua  $AI$ . Khi đó  $KD$  vuông góc với  $OI$ .



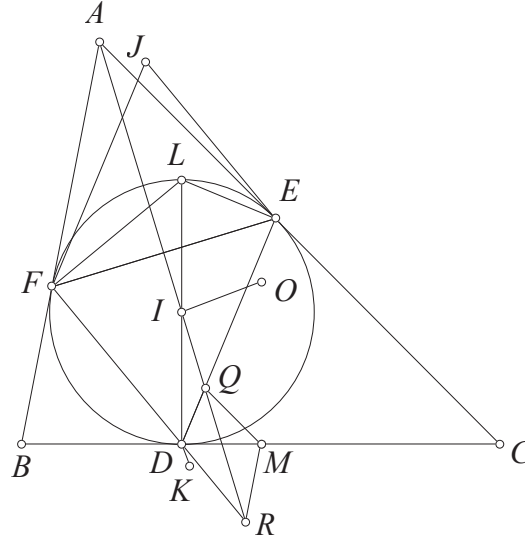
Hình 1.

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 127 năm 2013. Tôi xin trích dẫn lại lời giải trên báo

**Lời giải thứ nhất.** Gọi  $AI$  giao  $(O)$  tại  $N$  khác  $A$ ,  $AI$  giao  $BC$  tại  $F$ ,  $MN$  giao  $(O)$  tại  $T$  khác  $N$ ,  $MK$  giao  $AN$  tại  $H$ ,  $DK$  giao  $OI$  tại  $E$ . Chú ý rằng  $MK = 2MH$ , các tam giác  $NMH$ ,  $NFM$  đồng dạng và  $NM \parallel ID$ , ta có  $\frac{2MN}{MK} = \frac{MN}{MH} = \frac{FN}{FM} = \frac{IN}{DM}$ . Do đó  $\frac{MK}{MD} = \frac{2NM}{NI}$  (1). Chú ý rằng  $NT = 2NO$ ,  $\widehat{NBT} = \widehat{NMB} = 90^\circ$ ,  $NB = NI$ , ta có  $2NM.NO = NM.NT = NB^2 = NI^2$ . Do đó  $\frac{2NM}{NI} = \frac{NI}{NO}$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{MK}{MD} = \frac{NI}{NO}$ .

Từ đó, chú ý rằng  $\widehat{KMD} = \widehat{INO}$ , suy ra các tam giác  $MKD, NIO$  đồng dạng do đó  $\widehat{MDE} + \widehat{MOE} = 180^\circ - \widehat{MDK} + \widehat{NOI} = 180^\circ$ . Kết hợp với  $\widehat{DMO} = 90^\circ$ , ta có  $\widehat{DEO} = 360^\circ - 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Vậy  $DK \perp OI$ , ta có điều phải chứng minh.  $\square$



Hình 2.

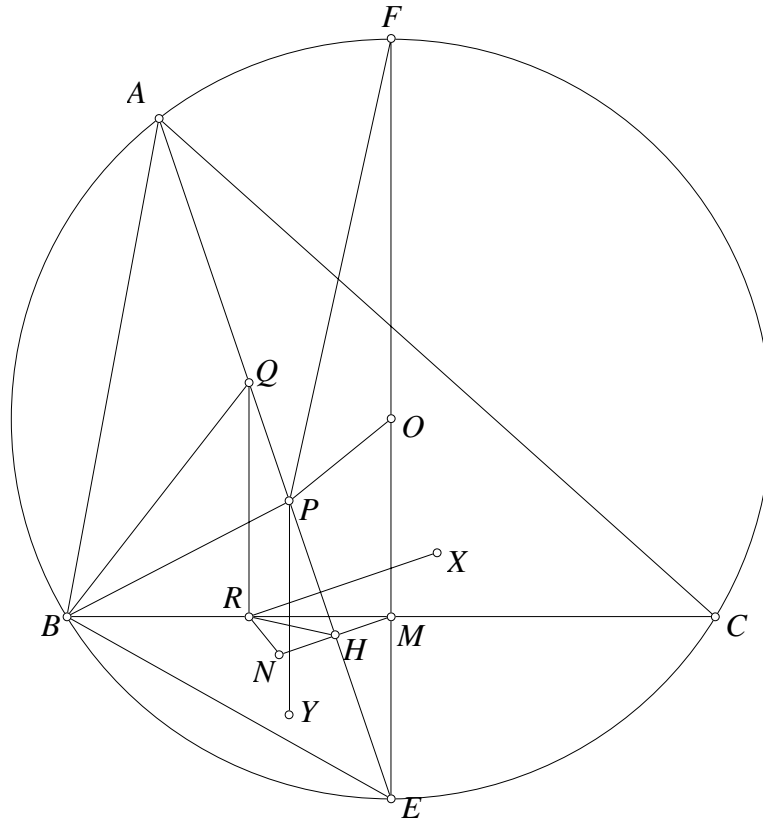
Cách giải sau dựa trên cách làm của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An trong [7] được tác giả viết lại.

**Lời giải thứ hai.** Gọi  $(O)$  tiếp xúc  $CA, AB$  tại  $E, F$ .  $AI$  cắt  $DE, DF$  lần lượt tại  $Q, R$ . Theo bổ đề quen thuộc thì  $MQ, MR$  là các đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên dễ chỉ ra  $MQ = MR$  và  $\angle QMR = 360^\circ - 2\angle QDR$  nên  $M$  là tâm ngoại tiếp tam giác  $DQR$ . Do  $K$  đối xứng  $M$  qua  $QR$  nên  $DK$  đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác  $DQR$ . Gọi  $DL$  là đường kính của  $(I)$  và  $J$  đối xứng  $D$  qua trung điểm  $EF$ . Dễ thấy đường nối  $L$  và tâm Euler của tam giác  $LEF$  là đường thẳng Euler của tam giác  $JEF$  nên song song với  $OI$  vì theo kết quả quen thuộc  $OI$  là đường thẳng Euler của tam giác  $DEF$ . Từ đó chú ý tam giác  $DQR$  và tam giác  $LEF$  có cạnh tương ứng vuông góc nên đường thẳng nối  $D$  và tâm Euler tam giác  $DQR$  vuông góc với đường thẳng nối  $L$  và tâm Euler tam giác  $LEF$ . Do đó  $DK \perp OI$ .  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán là một dạng bài chứng minh quan hệ vuông góc trên cấu hình tâm nội tiếp. Lời giải thứ nhất thuần túy hình học dựa trên các kỹ thuật về biến đổi tỷ số đoạn thẳng và tam giác đồng dạng. Lời giải thứ hai sử dụng nhiều kiến thức dưới dạng những bổ đề nhỏ, tuy vậy có ưu điểm là khá mạch lạc và dễ hiểu. Lời giải thứ nhất gợi cho ta ý tưởng tổng quát hơn bài toán là thay tâm nội tiếp  $I$  bởi hai điểm đẳng giác bất kỳ đẳng giác trên phân giác góc  $A$ . Dựa trên ý tưởng này bài toán được mở rộng hơn, bài toán này đã được tác giả sử dụng trong đề thi chọn đội tuyển toán THPT chuyên KHTN vòng 2 năm 2013.

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  với phân giác  $AD$ .  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác trên  $AD$ .  $R$  là hình chiếu của  $Q$  lên đoạn  $BC$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $R$  và vuông góc với  $OP$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $d$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $P$  di chuyển.





Hình 4.

**Lời giải thứ hai.** Tương tự trên phần đầu, gọi  $AD$  cắt  $(O)$  tại  $E$  khác  $A$ .  $EF$  là đường kính của  $(O)$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $N$  đối xứng  $M$  qua  $AD$ .  $H$  là trung điểm của  $MN$  thì  $H$  thuộc  $AD$ . Ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng qua  $R$  vuông góc  $OP$  luôn đi qua  $N$  cố định. Thật vậy,

Ta dễ có  $\angle RMN = \angle OEP$  (1).

Mặt khác theo định lý Thales và chú ý  $\triangle HDM \sim \triangle MDE$  ta có biến đổi tỷ số  $\frac{QE}{RM} = \frac{DE}{DM} = \frac{ME}{HM}$  (2)

Ta lại có biến đổi góc  $\angle PBE = \angle PBC + \angle CBE = \angle QBA + \angle QAB = \angle BQE$ . Từ đó có  $\triangle EBP \sim \triangle EQB$  suy ra  $\frac{BE}{PE} = \frac{BE}{QE}$  (3)

Sử dụng (2),(3) ta có biến đổi sau  $\frac{HM}{PE} = \frac{MH}{ME} \cdot \frac{ME}{BE} \cdot \frac{BE}{PE} = \frac{QE}{RM} \cdot \frac{BE}{EF} \cdot \frac{BE}{QE} = \frac{RM}{EF}$  (4).

Từ (1),(4) suy ra  $\triangle MHR \sim \triangle EPF$  từ đó suy ra  $\angle MRH = \angle EFP$  suy ra  $PF \perp RH$ . Từ đó kẻ  $RX \parallel MN, PY \parallel EF$  ta có các chùm điều hòa sau

$P(EF, OY) = -1 = R(MN, HX) = R(XH, NM)$

Vậy ta chú ý  $PE \perp RX, PF \perp RH, PY \perp RM$  vậy theo tính chất chùm trực giao suy ra  $RN \perp PO$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

**Nhận xét.** Lời giải dùng tính chất chùm điều hòa vẫn sử dụng qua kỹ thuật đồng dạng để chứng minh hai tia vuông góc tuy vậy việc biến đổi tỷ số để suy ra tam giác đồng dạng có phần đơn giản hơn so với lời giải thuần túy hình học. Lời giải dùng tính chất chùm điều hòa thực chất sẽ gợi mở cho chúng ta rất nhiều ý tưởng khác nhau để khai thác và phát triển bài toán. Lời giải sau đây tiếp cận bài toán theo một hướng tự nhiên hơn, khi cho  $P$  trùng với một số điểm đặc biệt, ta sẽ thu được vị trí điểm cố định. Lời giải do bạn **Trịnh Huy Vũ** sinh viên ĐHKHTN-ĐHQGHN đề xuất khi còn học lớp 10A1 Toán THPT chuyên KHTN.

**Lời giải thứ ba.** Dựng đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ . Qua  $H$  dựng đường thẳng vuông góc với  $OD$  cắt đường thẳng qua  $D$  vuông góc  $OA$  tại  $X$  cố định. Ta sẽ chứng minh rằng  $d$  đi qua  $X$ . Thật vậy, gọi  $OD$  cắt  $AH$  tại  $M$ .  $OP$  cắt  $AH$  tại  $L$ .  $AD$  cắt  $(O)$  tại  $F$  khác  $A$ .

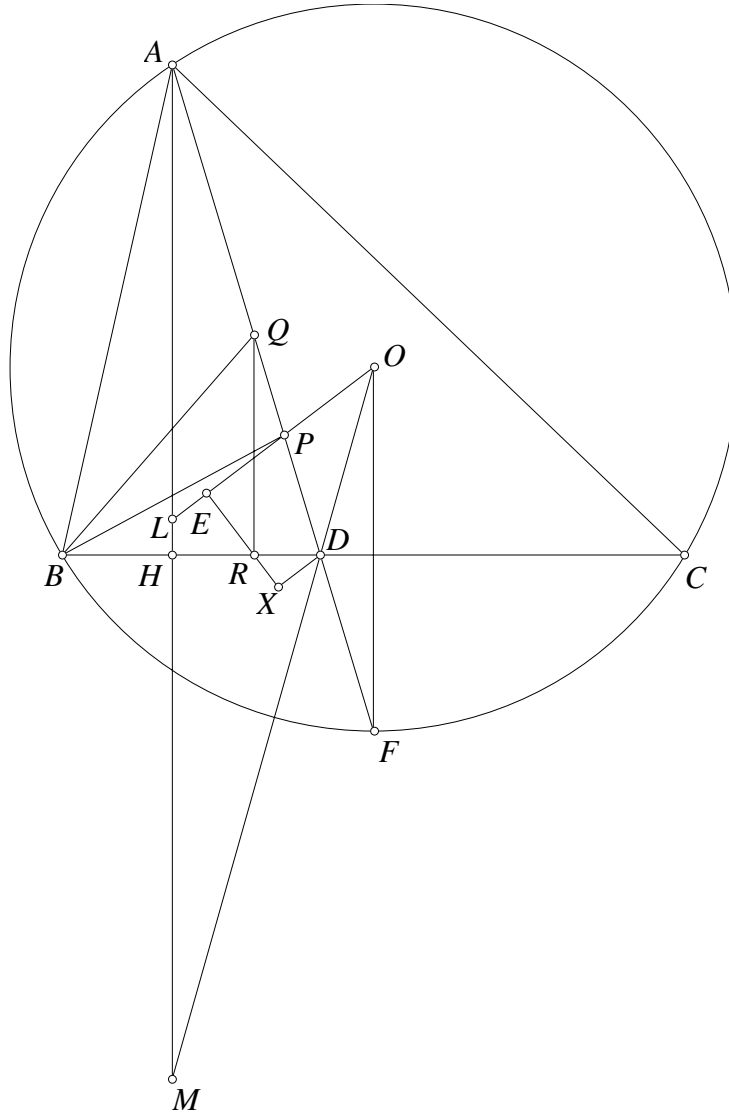
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $ADM$  với  $O, L, P$  thẳng hàng ta có  $\frac{LA}{LM} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{OM}{OD} = 1$  suy ra  $\frac{LM}{LA} = \frac{PD}{PA} \cdot \frac{OM}{OD}$ .

Sử dụng tính chất tỷ số diện tích tam giác có các góc ở đỉnh bằng nhau ta có  $\frac{QA}{PA} = \frac{S_{QAB}}{S_{PBD}} = \frac{BA \cdot BQ}{BP \cdot BD}$  và  $\frac{PA}{QD} = \frac{S_{PAB}}{S_{QBD}} = \frac{BQ \cdot BP}{BQ \cdot BD}$ .

Từ hai tỷ lệ trên chú ý  $OF \parallel AM$  suy ra  $\frac{QA}{QD} = \frac{BA^2}{BD^2} \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{FA}{FD} \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{OM}{OD} \cdot \frac{PD}{PA} = \frac{LM}{LA}$ .

Do đó  $\frac{RH}{RD} = \frac{QA}{QD} = \frac{LM}{LA}$  (Do  $QR \parallel AM$ ).

Để thấy  $\triangle XDH \sim \triangle OAM$  (g.g) suy ra  $\triangle XDR \sim \triangle OAL$  (c.g.c) suy ra  $\angle XRD = \angle OLA$ .



Hình 5.

Từ đó nếu đặt  $XR$  giao  $OP$  tại  $E$  thì tứ giác  $LERH$  nội tiếp suy ra  $\angle LER = 90^\circ$  hay đường thẳng qua  $R$  vuông góc  $OP$  đi qua  $X$ . Ta có điều phải chứng minh.  $\square$

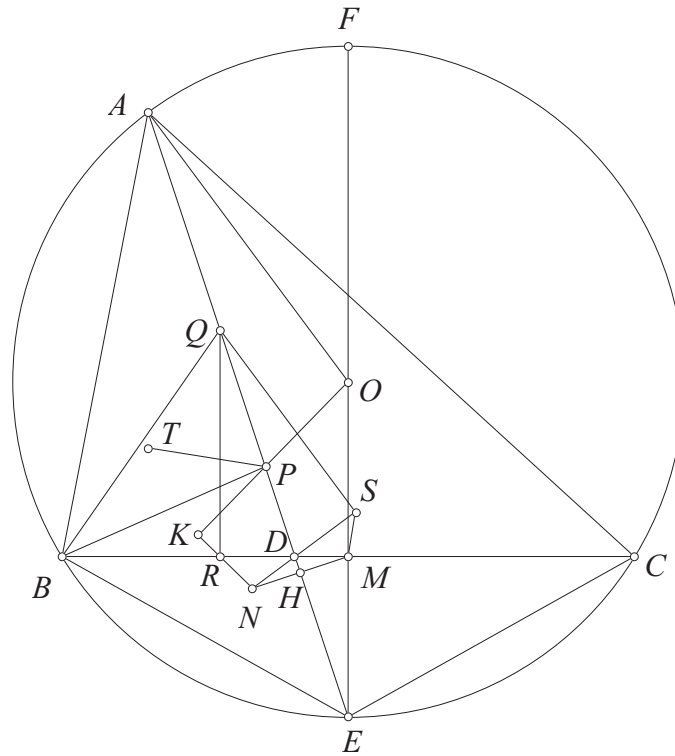
**Nhận xét.** Cho  $P$  trùng  $A$  thì  $Q$  trùng  $D$ . Từ đó ta thu được một vị trí đặc biệt, điểm  $X$  dễ dàng đoán nhận. Lời giải theo cách này cho ta một cách nghĩ khá tự nhiên. Chúng ta đi đến hai ứng dụng trực tiếp của bài toán này

**Bài toán 3.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  với phân giác  $AD$ .  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác trên  $AD$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là hình chiếu của  $P, Q$  lên  $BC$ . Đường thẳng qua  $K$  vuông góc  $OQ$  cắt đường thẳng qua  $L$  vuông góc  $OP$  tại  $R$ . Chứng minh rằng đường thẳng qua  $R$  vuông góc  $AD$  chia đôi  $BC$ .

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$  có tâm ngoại tiếp  $O$  và  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác trên phân giác góc  $\angle BAC$ .  $R, S$  lần lượt là hình chiếu của  $Q, P$  lên  $BC$ . Chứng minh rằng các đường thẳng qua  $R, S$  lần lượt vuông góc với  $OP, OQ$  cắt nhau trên đường đối trung qua  $A$  của tam giác.

Sử dụng đối xứng trục, ta thu được bài toán sau, bài toán này tham khảo [5]

**Bài toán 5.** Cho tam giác  $ABC$  cố định với tâm ngoại tiếp  $O$  và phân giác  $AD$ .  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác trong tam giác  $ABC$  và nằm trên  $AD$ . Lấy điểm  $S$  sao cho  $QS \parallel AO$  và  $DS \perp AO$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh rằng đường thẳng qua  $P$  vuông góc với  $SM$  luôn đi qua điểm cố định khi  $P, Q$  thay đổi.

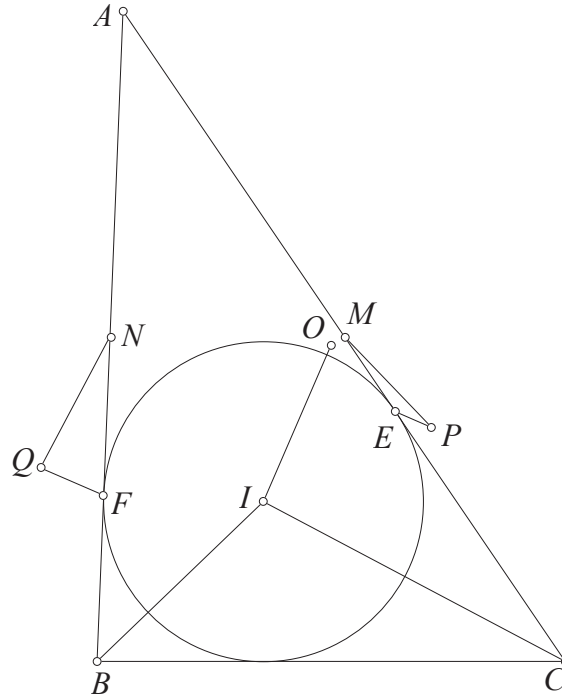


Hình 6.

**Lời giải.** Gọi  $R$  là hình chiếu của  $Q$  lên  $BC$ . Do  $DS \perp AO$  nên  $DS$  và  $BC$  đối xứng nhau qua  $AD$ , từ đó dễ thấy  $R$  và  $S$  đối xứng nhau qua  $AD$ . Gọi  $N, T$  đối xứng  $M, O$  qua  $AD$ . Ta sẽ chứng minh  $PT \perp MS$ , điều đó có nghĩa là đường thẳng qua  $P$  vuông góc với  $SM$  đi qua  $T$  cố định. Xét qua phép đối xứng trục  $AD$  thì ta cần chứng minh  $RN \perp OP$ . Đây chính là bài toán số 2.  $\square$

**Nhận xét.** Việc dùng phép đối xứng trục  $AD$  chuyển bài toán về chứng minh  $RN \perp OP$  là một việc làm quan trọng trong bài toán này.

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $CA, AB$  tại  $E, F$ .  $M, N$  là trung điểm của  $CA, AB$ .  $P, Q$  lần lượt đối xứng  $M, N$  qua  $IB, IC$ . Chứng minh rằng  $PE \parallel QF$ .

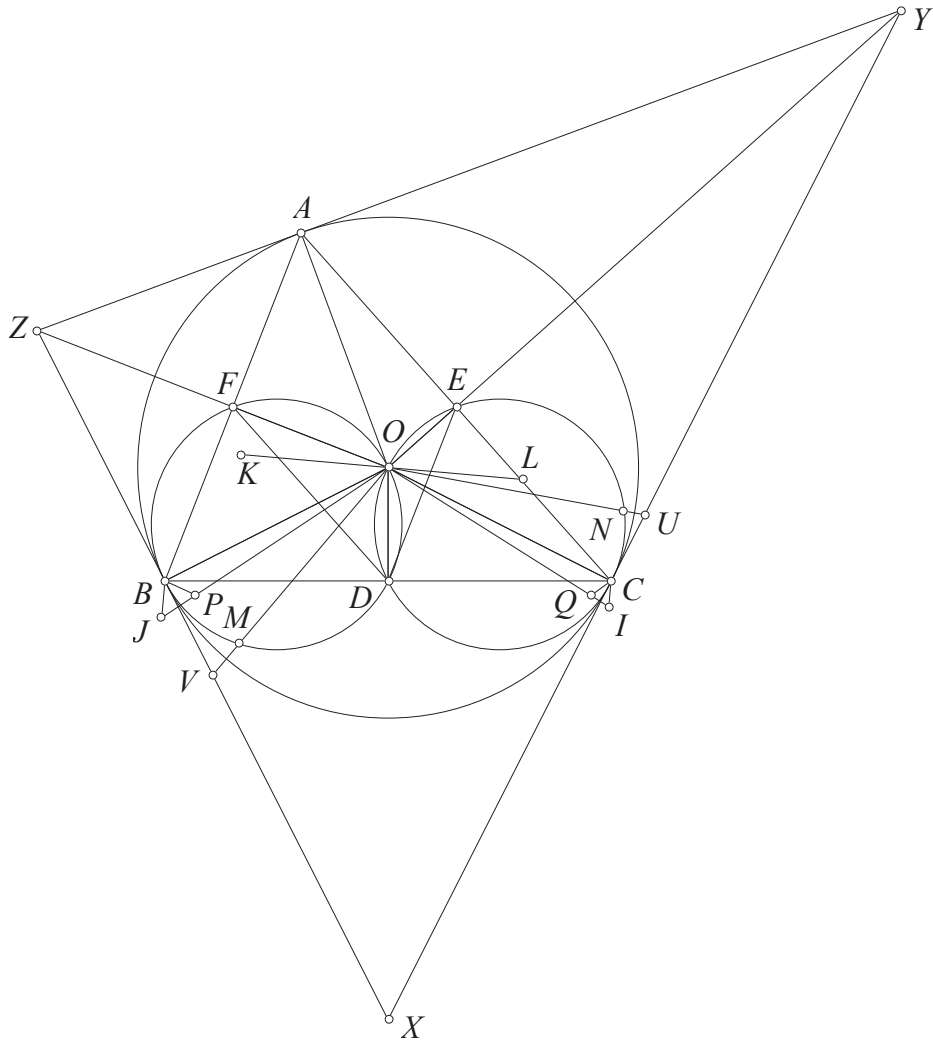


Hình 7.

**Lời giải.** Gọi  $O$  là tâm ngoại tiếp tam giác theo bài toán 1 thì  $PE \perp OI \perp QF$  do đó  $PE \parallel QF$ .  $\square$

**Nhận xét.** Bài toán này có thể coi là hệ quả trực tiếp của bài toán 1 nhưng việc phát biểu dưới dạng hai đường thẳng song song buộc người giải phải dựng lại tâm ngoại tiếp  $O$  là một yếu tố có vẻ không mấy liên quan tới bài toán, đó là cái độc đáo của cách phát biểu này. Nếu sử dụng phép nghịch đảo trên bài toán này, chúng ta sẽ thu được bài toán thú vị dưới đây

**Bài toán 7.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Đường đối trung qua  $O$  của tam giác  $ODF, ODE$  lần lượt cắt các đường tròn  $(ODF), (ODE)$  tại  $M, N$  khác  $O$ .  $P, Q$  lần lượt là đối xứng của  $M, N$  qua  $OE, OF$ . Gọi  $K, L$  là tâm ngoại tiếp các tam giác  $OBP, OCQ$ . Chứng minh rằng  $K, O, L$  thẳng hàng.



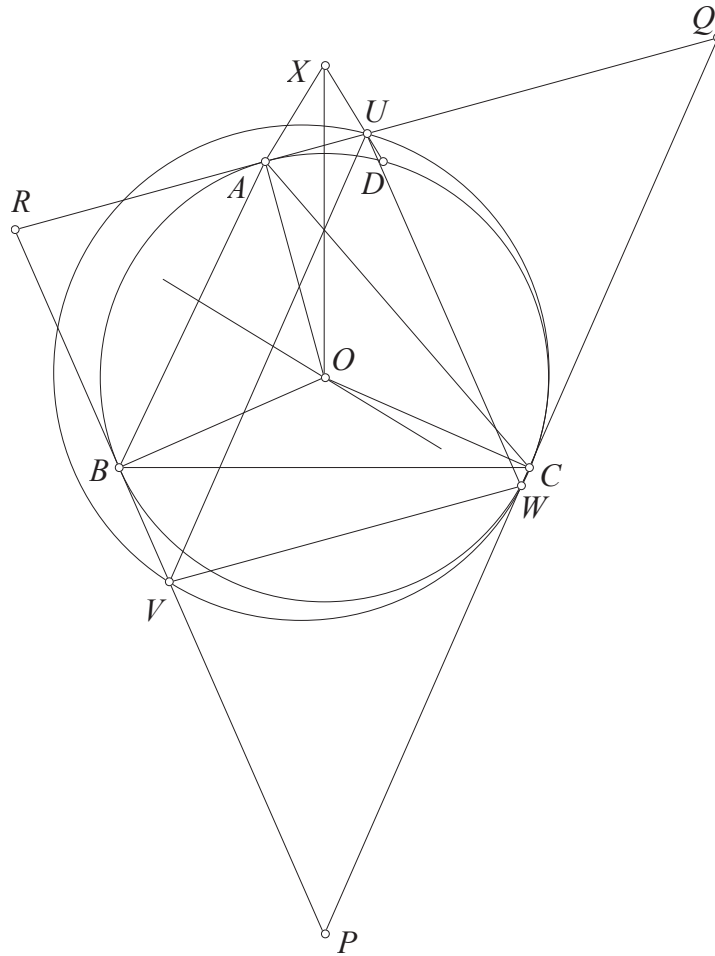
Hình 8.

**Lời giải.** Gọi tiếp tuyến tại  $A, B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tạo thành tam giác  $X, Y, Z$ . Dễ thấy  $X, Y, Z$  là nghịch đảo của  $D, E, F$  qua đường tròn  $(O)$  nên qua phép nghịch đảo này thì  $M, N$  lần lượt biến thành  $V, U$  là trung điểm của  $XZ, XY$ . Gọi  $J, I$  lần lượt là ảnh của  $P, Q$  trong phép nghịch đảo qua  $(O)$  thì  $J, I$  lần lượt là đối xứng của  $V, U$  theo thứ tự qua  $OE, OF$ . Theo bài toán trên thì  $BJ \parallel CI$  nên qua nghịch đảo thì các đường tròn  $(OBP)$  và  $(OCQ)$  tiếp xúc hay  $K, O, L$  thẳng hàng.  $\square$

Chúng ta có thể tiếp tục với một ứng dụng khác của bài toán 1 khi kết hợp định lý Feuerbach

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  lần lượt đối xứng với  $A, B, C$  qua trung trực  $BC, CA, AB$ . Trên trung trực  $BC, CA, AB$  lấy các điểm  $X, Y, Z$  sao cho  $AX, BY, CZ$  vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$ .  $DX, EY, FZ$  lần lượt cắt các tiếp tuyến qua  $A, B, C$  của  $(O)$  tại  $U, V, W$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $UVW$  tiếp xúc  $(O)$ .



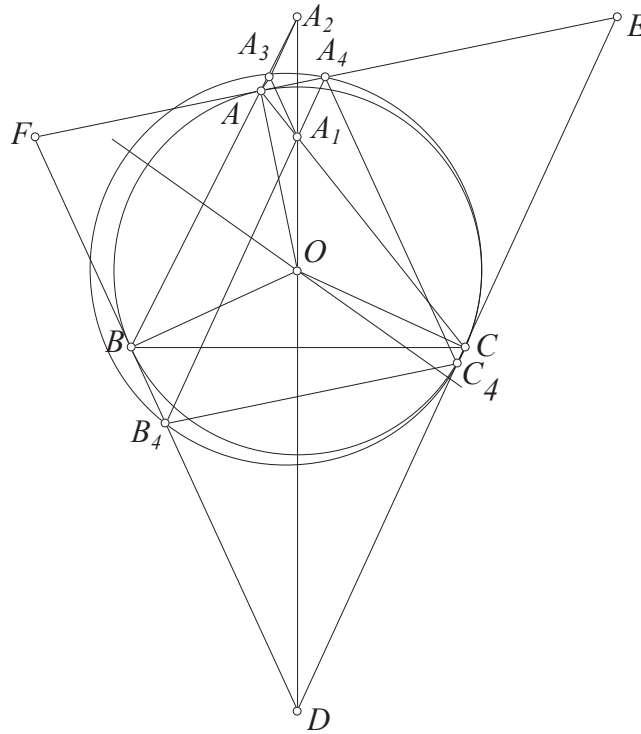


Hình 9.

**Lời giải.** Gọi các tiếp tuyến tại  $A, B, C$  của  $(O)$  cắt nhau lần lượt tại  $P, Q, R$ . Dễ thấy đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$  chính là đường thẳng  $OI$  của tam giác  $PQR$ . Đường thẳng  $XA$  và  $XD$  đối xứng nhau qua trung trực  $BC$ . Theo bài toán 1 thì đối xứng của trung điểm  $QR$  qua trung trực  $BC$  nằm trên đường thẳng qua  $A$  vuông góc đường thẳng  $OI$  của tam giác  $PQR$  hay chính là nằm trên  $XA$  do đó đối xứng của  $XA$  qua trung trực  $BC$  đi qua trung điểm  $QR$  hay  $U$  chính là trung điểm  $QR$ . Tương tự  $V, W$  là trung điểm  $RP, PQ$ . Vậy theo định lý Feuerbach thì đường tròn ngoại tiếp tam giác  $UVW$  tiếp xúc  $(O)$ .  $\square$

Ta có một cách diễn đạt khác cho bài toán 8 như sau [6]

**Bài toán 9.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trung trực  $BC$  cắt  $CA, AB$  tại  $A_1, A_2$ . Trên trung trực  $A_1A_2$  lấy  $A_3$  sao cho  $AA_3$  vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$ . Lấy  $A_4$  đối xứng  $A_3$  qua  $A_1A_2$ . Dựng tương tự các điểm  $B_4, C_4$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_4B_4C_4$  tiếp xúc  $(O)$ .



Hình 10.

**Lời giải.** Gọi các tiếp tuyến qua  $A, B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tạo thành tam giác  $DEF$  thì đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$  chính là đường thẳng  $OI$  của tam giác  $DEF$ . Theo bổ đề thì đường thẳng  $AA_3$  đi qua đối xứng của trung điểm  $EF$  qua  $OD$ . Ta dễ chứng minh được trung điểm  $EF$  cũng nằm trên trung trực  $A_1A_2$ . Do đó qua đối xứng trục  $OD$  thì trung điểm  $EF$  phải là đối xứng của giao điểm đường thẳng qua  $A$  vuông góc đường thẳng Euler và trung trực  $A_1A_2$  với chú ý rằng trung trực  $A_1A_2$  vuông góc  $OD$  nên bất biến qua đối xứng trục  $OD$ . Giao điểm đó chính là  $A_3$  nên  $A_4$  đối xứng  $A_3$  qua  $OD$  chính là trung điểm  $EF$ . Chứng minh tương tự  $B_4, C_4$  là trung điểm  $FD, DE$ . Từ đó theo định lý Feuerbach thì đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_4B_4C_4$  tiếp xúc  $(O)$ .  $\square$

Cuối cùng ta đưa ra một tổng quát cho bài toán 2 với hai điểm đẳng giác bất kỳ

**Bài toán 10.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ .  $D$  là một điểm cố định trên cung  $BC$  không chứa  $A$  của  $(O)$ .  $P$  di chuyển trên  $AD$ .  $E$  thuộc  $(O)$  sao cho  $DE \perp BC$ .  $K$  là trung điểm  $DE$ .  $Q$  đẳng giác  $P$  trong tam giác  $ABC$ .  $R$  là hình chiếu của  $Q$  lên  $BC$ . Chứng minh rằng đường thẳng qua  $R$  vuông góc với  $PK$  luôn đi qua điểm cố định khi  $P$  thay đổi.

Trước hết ta sử dụng bổ đề sau

**Bổ đề 10.1.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp  $(O)$ .  $P, Q$  đẳng giác trong tam giác  $ABC$ .  $AP$  cắt  $(O)$  tại  $M$  khác  $A$ .  $MQ$  cắt  $BC$  tại  $E$ . Thì  $PE \parallel AQ$ .



**Lời giải.** Gọi  $AQ$  cắt  $(O)$  tại  $F$  thì  $F$  cố định.  $H$  là hình chiếu của  $F$  lên  $BC$ . Đường thẳng qua  $H$  vuông góc với  $AD$  cắt đường thẳng qua  $R$  vuông góc với  $PK$  tại  $X$ . Ta sẽ chỉ ra  $X$  cố định bằng cách chứng minh  $XH$  có độ dài không đổi, thật vậy. Ta dễ thấy tam giác  $DPK$  và tam giác  $HXR$  đồng dạng nên  $XH.DK = RH.PD$ . Gọi  $DQ$  cắt  $BC$  tại  $G$  và  $AF$  cắt  $BC$  tại  $L$ . Theo bổ đề thì  $PG \parallel AL$  do đó theo định lý Thales ta thấy  $\frac{DP}{DA} = \frac{DG}{DQ} = \frac{FL}{FQ} = \frac{LH}{RH}$  hay  $RH.PD = DA.LH$  không đổi. Từ đó  $XH.DK$  cũng không đổi mà  $DK$  không đổi nên độ dài  $XH$  cố định do đó  $X$  là điểm cố định.  $\square$

**Nhận xét.** Đây là một bài toán chứng minh điểm cố định đặc sắc. Điểm cố định  $X$  trong bài này không cần chỉ ra cách dựng một cách tường minh mà ta chỉ cần chỉ ra  $X$  cố định một cách gián tiếp thông qua độ dài  $XH$  không đổi. Khi  $P, Q$  nằm trên phân giác góc  $\angle BAC$  ta thu được bài toán 2. Trong cách giải trên thực chất ta chỉ cần  $DK$  có độ dài không đổi nên bạn **Nguyễn Hải Nam** lớp 11 toán THPT chuyên KHTN đã đề xuất ý tưởng ta chỉ cần  $K$  là điểm cố định trên đoạn  $DE$  là được. Trong chứng minh có sử dụng bổ đề 10.1 có thể coi là một bổ đề kinh điển của các bài toán về điểm đẳng giác, cách chứng minh bổ đề do bạn **Phan Anh Quân** sinh viên ĐHKHTN-ĐHQGHN đề xuất khi còn học lớp 11A1 Toán THPT chuyên KHTN. Bạn **Trịnh Huy Vũ** bổ sung nhận xét ta có thể chứng minh  $XL \perp AK$ , thật vậy. Từ  $\triangle DPK \sim \triangle HXR$  kết hợp  $\frac{HL}{HR} = \frac{DP}{DA}$  suy ra  $\triangle DAK \sim \triangle HXL$  mà  $DA \perp HX$  và  $DK \perp HL$  nên suy ra  $XL \perp AK$ .

**Lời kết.** Bài viết hoàn chỉnh này đã được tác giả ấp ủ rất lâu từ ngày viết bài trong [4]. Các đề toán và lời giải thứ nhất trong bài viết trừ bài toán 1 đều là của tác giả đưa ra trong suốt một chặng đường 3 năm tiếp tục dạy đội tuyển chuyên KHTN từ năm 2013 tới nay. Sự phát triển liên tục từ bài toán 2 tới bài toán 10 là một chặng đường dài với nhiều thách thức nên những sản phẩm được hoàn thành mang một ý nghĩa riêng. Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn bạn **Trịnh Huy Vũ** sinh viên ĐHKHTN-ĐHQGHN đã đóng góp các cách giải khác cho bài toán chọn đội tuyển từ ngày lớp 10 đồng thời góp ý cho tác giả về bài viết.

## Tài liệu

- [1] Tạp chí TTT2 số 123+124 năm 2013.
- [2] Tạp chí TTT2 số 127 năm 2013.
- [3] Đề thi chọn đội tuyển toán lớp 11,12 trường THPT chuyên KHTN năm 2013.
- [4] Blog hình học sơ cấp: Một bài toán điểm cố định  
<http://analgeomatrica.blogspot.com/2014/02/mot-bai-toan-iem-co-inh.html>
- [5] Báo toán học và tuổi trẻ số 470 và 471: Phép đối xứng trục trong thực hành giải toán  
<http://analgeomatrica.blogspot.com/2016/09/phep-oi-xung-truc-trong-thuc-hanh-giai.html>
- [6] Mỗi tuần một bài toán: Tuần 4 tháng 12 năm 2016 từ blog hình học sơ cấp  
<http://analgeomatrica.blogspot.com/2016/12/moi-tuan-mot-bai-toan-tuan-4-thang-12.html>
- [7] Mỗi tuần một bài toán: Tuần 4 tháng 12 năm 2016 từ <http://diendantoanhoc.net>

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.

E-mail: [analgeomatrica@gmail.com](mailto:analgeomatrica@gmail.com)