

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
TỈNH QUẢNG TRỊ**

*****📖*****



**TỔNG HỢP CÁC BÀI BẤT ĐẲNG THỨC ÔN THI
VÀO CẤP 3 CHUYÊN**

**Thực hiện bởi: Võ Thanh Long
Trương Quang Tân
Võ Đăng Phi Long
Lớp 10 Toán,
trường THPT chuyên Lê Quý Đôn,
tỉnh Quảng Trị**

TP.Đông Hà, ngày 15 tháng 5 năm 2017

Lời nói đầu

Tài liệu được tổng hợp từ topic BẤT ĐẲNG THỨC ôn thi vào lớp 10 THPT 2017 - 2018 trên website diendantoanhoc.net. Mọi người có thể tham khảo thêm tại <https://diendantoanhoc.net/topic/172159-topic-b%E1%BA%A5t-%C4%91%E1%BA%B3ng-th%E1%BB%A9c-%C3%B4n-thi-v%C3%A0o-l%E1%BB%9Bp-10-thpt-2017-2018/page-1>

Mỗi bài đều có nhiều cách giải nhưng tôi ưu tiên những cách giải ngắn gọn, dễ hiểu và phù hợp với trình độ THCS. Đây là lần đầu tiên tôi viết tài liệu tổng hợp này, dù đã cố gắng chỉnh sửa nhưng tất nhiên không tránh khỏi thiếu sót, sai lầm. Mong quý độc giả thông cảm.

Mọi thắc mắc xin liên hệ:

+Gmail: thanhlonglqqt@gmail.com

+Facebook: <https://www.facebook.com/long.vothanh.7792>

Copy right © 2017 by Vo Thanh Long.

All right reserved. No part of this book may be reproduced or distributed in any form or by any means, or stored in data base or a retrieval system, without the prior written the permission of the author.

Bài 1: (Thi thử vào 10 chuyên toán KHTN 2016-2017 đợt 1 vòng 2)

Cho $a, b, c > 0$; $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1-a^2}{1+a^2} \leq \sum \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

Lời giải: (Nguyễn Phúc Tăng)

Hướng 1:

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{1-b^2}{1+b^2} = \frac{2c[2ab+c(a+b)]}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Thật vậy, theo Cauchy-Schwarz, ta có:

$$2ab+c(a+b) \leq (a+b)(c+\sqrt{ab}) \leq (a+b)\sqrt{(b+c)(c+a)}$$

Vì thế ghép đôi xứng các bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

Hướng 2:

Rõ ràng BĐT đúng khi chứng minh được trong tam giác:

$$\cos A + \cos B \leq 2 \sin \frac{C}{2}$$

Thật vậy

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2}$$

Hướng 3:

Ta có $ab+bc+ca=1$ nên

$$\sum \frac{1-a^2}{1+a^2} = \sum \frac{(1-a^2)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \sum \frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\sum \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sum \frac{a(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Áp dụng AM-GM thì

$$a(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a(b+c)(a+\sqrt{bc}) \geq a^2(b+c)+2abc$$

Bài 2: (JBMO 2016)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \sum \frac{8}{a+3}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + 4abc &\leq 2(a^2 + b^2)(c+1) \\ \Rightarrow \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} &\geq \frac{4}{(a^2 + b^2)(c+1)} \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có:

$$\frac{4}{(a^2 + b^2)(c+1)} + \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{2(c+1)}} \geq \frac{8}{c+3} \quad (2) \text{ (AM-GM)}$$

Nên từ (1) và (2) ta có đpcm.

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq 6$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz:

$$VT = \sum \frac{a^2}{ab} + a + b + c \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + a + b + c$$

Đặt $p=a+b+c$ từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \sum ab &= \frac{p^2 - 3}{2} \\ \Rightarrow VT &\geq \frac{2p^2}{p^2 - 3} + p \geq 6 \Leftrightarrow (p+2)(p-3)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn không có 2 số nào đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Lời giải:

Ta chứng minh:

$$\sum \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \sum \frac{a}{b + c}$$

và

$$\sum \frac{a}{b + c} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2(ab + bc + ca)}$$

(hiển nhiên vì đây chính là BĐT C-S)

Từ 2 BĐT trên dễ dàng suy ra đpcm.

Bài 5: (Olympic 30/4 2017)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^4 + 27}{b + c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } a^2 + b^2 + c^2 = x \Rightarrow \sum \frac{a^4}{b + c} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a + b + c)} \geq \frac{x^2}{2\sqrt{3x}}$$

Ta quay về chứng minh:

$$\frac{x^2 + 243}{2\sqrt{3x}} \geq 2x \Leftrightarrow (x - 27)^2 (x^2 + 6x + 81) \geq 0$$

Vậy ta có đpcm. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Về bài này có thể giải theo cách dùng AM-GM thế này:

$$a^4 + 27 \geq 4a^3$$

Bài 6: (Nguyễn Việt Hùng, HSGS)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^2}{b + c} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{6(ab + bc + ca)} + \frac{4}{9}(a + b + c)$$

Lời giải

Ta có BĐT phụ khá quen thuộc

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Khi đó theo BĐT Holder thì:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^2}{b+c} &= \sum \frac{a^3}{ab+ca} \geq \frac{(a+b+c)^3}{6(ab+bc+ca)} = \frac{a^3+b^3+c^3}{6(ab+bc+ca)} \\ &+ \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{6(ab+bc+ca)} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{6(ab+bc+ca)} + \frac{4}{9}(a+b+c) \end{aligned}$$

Bài 7: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3b$

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{8}{(c+3)^2} \geq 1$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} 3b &\geq \frac{b^2}{2} + \left(\frac{b^2}{4} + c^2 \right) + \left(\frac{b^2}{4} + a^2 \right) \geq \frac{b^2}{2} + bc + ab \\ &\Rightarrow 3 \geq \frac{b}{2} + a + c \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4}{(b+2)^2} + \frac{4}{(c+3)^2} + \frac{4}{(c+3)^2} \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{2}{b+2} + \frac{2}{c+3} + \frac{2}{c+3} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{b}{2}+1} + \frac{4}{c+3} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left[\frac{(1+1+2)^2}{a+1+\frac{b}{2}+1+c+3} \right]^2 \Rightarrow P \geq \frac{1}{4} \left[\frac{(1+1+2)^2}{a+1+\frac{b}{2}+1+c+3} \right]^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1; b=2; c=1$

Bài 8: (Trần Quốc Anh)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \leq 3$$

(Bài này hiện chưa có lời giải)

Bài 9: (MOSP 2005)

Cho $a, b, c \geq 0$ và không đồng thời bằng không thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải:

Từ điều kiện $ab+bc+ca=1$ ta có được $1 \geq ab; 1 \geq bc; 1 \geq ca$. Trong 3 số dương bất kỳ luôn có 2 số nằm cùng phía so với 1, ta giả sử 2 số đó là a, b . Từ đó suy ra:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow 1+ab \geq a+b \Rightarrow 2 \geq 1+ab \geq a+b$$

$$\text{Ta có: } ab+bc+ca=1 \Rightarrow c = \frac{1-ab}{a+b} \geq 0$$

Thay $\Rightarrow c = \frac{1-ab}{a+b} \geq 0$ vào BĐT cần chứng minh ta được:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{1+b^2} + \frac{a+b}{1+a^2} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{5}{2(a+b)}$$

Theo AM-GM ta có:

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+a^2} = 1 - \frac{b^2}{1+b^2} + 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \geq 1 - \frac{b}{2} + 1 - \frac{a}{2} = 2 - \frac{a+b}{2}$$

Lúc này, ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + 2 - \frac{a+b}{2} \geq \frac{5}{2(a+b)} \Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{2}{a+b} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2(a+b)^2}$$

Đặt $x = \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2}$, BĐT trên trở thành:

$$x^3 + 2x - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2(2x-1) \geq 0$$

BĐT trên đúng với mọi $x \geq \frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị tương ứng.

Bài 10 : (T6 Tạp chí THPT số 474)

Với x là số thực thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$f = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 32} + \sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 4x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} f &= (\sqrt{(1-x)^2 + 1} + \sqrt{(x-5)^2 + 1}) + (\sqrt{(x-4)^2 + 16} + \sqrt{(2-x)^2 + 16}) + \sqrt{(x-3)^2 + 16} \\ &\geq \sqrt{4^2 + 2^2} + \sqrt{2^2 + 8^2} + \sqrt{16} = \sqrt{20} + \sqrt{68} + 4 \end{aligned}$$

Vậy min f(x) = $\sqrt{20} + \sqrt{68} + 4$ tại x=3

Bài 11: (Thi thử KHTN đợt 3 vòng 2)

Cho các số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$$

Lời giải:

Cách 1: Giả sử $a = \max\{a; b; c\}$ mà $a+b+c=3$ nên $a \geq 1$

Vì $a=3-b-c$, do đó BĐT cần chứng minh tương đương:

$$b^2 + c^2 + bc - 3b - 3c + 2 \leq 0$$

Ta có: $b^2 + c^2 + bc - 3b - 3c + 2 \leq b^2 + c^2 + 2bc - 3b - 3c + 2 = (b+c-1)(b+c-2)$

Lại có: $b+c=3-a$ và $1 \leq a \leq 2$ nên $1 \leq b+c \leq 2$

Kết hợp (1) suy ra đpcm.

Cách 2: Vì $a, b, c \in [0; 2] \Rightarrow (2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \Leftrightarrow \sum ab \geq 2 + \frac{abc}{2} \geq 2$

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$9 - 2\sum ab \leq 5 \Leftrightarrow \sum ab \geq 2$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=1; c=0$ và các hoán vị.

Bài 12 : (Korean MO ngày 2 2016)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm Max:

$$P = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$$

(Chưa có lời giải)

Bài 13: (Lê Khánh Sỹ)

Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a+b}{c} \geq 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)}$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c.

BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{abc(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$

Sử dụng BĐT AM-GM ta có:

$$2\sqrt{abc(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)} \leq ac(ab+bc+ca) + b(ab^2+bc^2+ca^2)$$

$$= a^2bc + abc^2 + a^2c^2 + ab^3 + b^2c^2 + a^2bc$$

Ta cần chứng minh

$$a^2b^2 + ab^2c \geq ab^3 + a^2bc \Leftrightarrow ab(c-b)(b-a) \geq 0$$

luôn đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$

Bài 14: (Thi thử lần 4 KHTN 2014-2015)

Cho $a; b; c$ là các số thực dương thỏa $abc=a+b+c+2$, chứng minh rằng:

$$\sum \sqrt{\frac{1}{a+1}} \leq \sqrt{3}$$

Lời giải:

Cách 1: Theo giả thiết thì có thể đặt $(a; b; c) = \left(\frac{x+y}{z}; \frac{y+z}{x}; \frac{z+x}{y}\right)$ với $x, y, z > 0$

Khi đó:

$$\sum \sqrt{\frac{1}{a+1}} = \sum \sqrt{\frac{z}{x+y+z}}$$

Mặt khác thì:

$$\left(\sum \sqrt{\frac{z}{x+y+z}}\right)^2 \leq 3 \sum \frac{z}{x+y+z} = 3$$

$$\Rightarrow \sum \sqrt{\frac{z}{x+y+z}} \leq \sqrt{3}$$

$$\text{Hay } \sum \sqrt{\frac{1}{a+1}} \leq \sqrt{3} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$

$$\text{Cách 2: Ta có } a+b+c+2=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

$$\text{Nên } VT \leq \sqrt{3 \sum \frac{1}{a+1}} = \sqrt{3}$$

Bài 15: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$7(a^3 + b^3 + c^3) + 6 \geq 3\sqrt{ac}(2ac+1) + 3\sqrt{bc}(2bc+1) + 3\sqrt{ab}(2ab+1)$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$3 \sum_{cyc} (a^3 + b^3) \geq 6 \sum_{cyc} ab\sqrt{ab}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 = \sum_{cyc} (a^3 + 1 + 1) \geq 3(a + b + c) \geq 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

Cộng theo vế 2 BĐT trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 16: Cho các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc} \geq \sqrt{10}$

Chứng minh rằng:

$$\sum \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \geq 6\sqrt{6}$$

(Chưa có lời giải)

Bài 17:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + 1}{3\sqrt[3]{a^2b^2} \left(1 + 3\sqrt[3]{c^2}\right) - 8} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{2(a^2 + 1)}{3\sqrt[3]{a^2b^2} \left(1 + 3\sqrt[3]{c^2}\right) - 8} \geq 3$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{2(a^2+1)}{3\sqrt[3]{a^2b^2}(1+3\sqrt[3]{c^2})-8} &= \sum_{cyc} \frac{a^2+a^2+1+1}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-8} \\ &\geq \sum_{cyc} \frac{a^2+2a+1}{a+b+ab+3(ab+bc+ca)-8} \\ &\geq \sum_{cyc} \frac{a^2+2a+1}{a+b+ab+(a+b+c)^2-8} \\ &= \sum_{cyc} \frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+1)} = \sum_{cyc} \frac{(a+1)}{(b+1)} \geq 3 \end{aligned}$$

Hoàn tất bài toán. :)

Bài 18: (Vasile Cirtoaje)

Cho $x, y, z > 0$; $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{xy+1} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT CS kết hợp bổ đề Vasile quen thuộc ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{x}{xy+1} &\geq \frac{A}{B} \text{ trong đó:} \\ A &= \sum \left(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} + \sqrt{z^3} \right)^2 \\ B &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{3} + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$3A \geq (x^2 + y^2 + z^2)^3$$

Để đơn giản hóa ta đặt: $x^2 + y^2 + z^2 = t (t \geq 3)$ lúc này BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{t^2}{t+3} \geq \frac{3}{2}. \text{ Hiển nhiên đúng vì nó tương đương với: } (2t+3)(t-3) \geq 0. \text{ ĐPCM.}$$

Bài 19: (Tạp chí THPT)

Cho các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a+2b+3c}}{\sqrt{2a+2b+3c} + \sqrt{a+5b+3c} + \sqrt{a+2b+7c}}$$

(Chưa có lời giải)

Bài 20: (Tập chí THPT)

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{9abc}{a+b+c} + (c-a)^2$$

(Chưa có lời giải)

Bài 21: (Tập chí AMM)

Cho các số a,b,c ∈ [1;2]. Chứng minh rằng:

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{45}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Lời giải:

Ta có bổ đề quen thuộc sau: Với a,b,c ∈ [1;2]. Chứng minh:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10$$

(Bổ đề các bạn tham khảo ở Nâng cao & Phát triển toán 9 tập 1, ở đây mình không chứng minh lại nữa)

Áp dụng BĐT trên ta quy về chứng minh:

$$(2a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{25}{2}$$

Khai triển và sử dụng giả thiết $c \geq 1$ ta có: $\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} + 2a + b \leq \frac{19}{2}$

BĐT này tương đương với : $(4+4b)a^2 + a(2b^2 - 19b) + 2b^2 \leq 0$

Nhân thấy đây là tam thức d2, tham số b. Hệ số cao nhất dương. a thuộc khoảng [1,2] nên theo định lý về hàm cực trị biên thì :

$f(a) \leq \max\{f(1); f(2)\}$ Đến đây thì đơn giản rồi ta xét BĐT trên tại a=1 và a=2 để từ đó CM vs BĐT 1 biến b với ĐK b thuộc [1,2]. CM cái này không mấy khó khăn, các bạn hãy thử xem.

Bài 22: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} \right)^2 \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2}{a^4 + b^4 + c^4}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{2 \left(\sum_{cyc} (a-b)^2 \right)^2}{9(a^4 + b^4 + c^4)} = \frac{\left(\sum_{cyc} (a-b)^2 \right)^2}{18(a^4 + b^4 + c^4)} \leq \frac{\sum_{cyc} (a-b)^4}{6(a^4 + b^4 + c^4)}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} VT - \frac{\sum_{cyc} (a-b)^4}{6(a^4 + b^4 + c^4)} &= \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{2(4a^2 - ab + 4b^2)}{9(a^2 + ab + b^2)^2} - \frac{(a-b)^2}{6(a^4 + b^4 + c^4)} \right) \\ &\geq \sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{2(4a^2 - ab + 4b^2)}{9(a^2 + ab + b^2)^2} - \frac{(a-b)^2}{6(a^4 + b^4)} \right) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đúng nếu ta chứng minh được đánh giá sau đúng:

$$4(4x^2 - x + 4)(x^4 + 1) > 3(x-1)^2(x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow 13x^6 - 4x^5 + 16x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 4x + 13 > 0$$

Dễ thấy đánh giá trên luôn đúng nên ta có đpcm.

Bài 23: (Lil.Tee boxmath - Tăng Hải Tuân)

Cho a,b,c là các số thực dương có tổng là 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + \sqrt{c}} + \frac{b}{c^2 + \sqrt{a}} + \frac{c}{a^2 + \sqrt{b}} \geq \frac{3}{3 - \sqrt[3]{abc}}$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum \frac{a}{b^2 + \sqrt{c}} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum ab^2 + \sum a\sqrt{c}} = \frac{9}{\sum ab^2 + \sum a\sqrt{c}}$$

Cũng theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum a\sqrt{c} \leq \sqrt{(\sum a)(\sum ab)} \leq \sqrt{\frac{(\sum a)^3}{3}} = 3$$

Mặt khác sử dụng bổ đề:

$$\sum ab^2 \leq \frac{4}{27} \left(\sum a \right)^3 - abc = 4 - abc$$

Như vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{9}{7-abc} \geq \frac{3}{3-\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow abc + 2 \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

(luôn đúng theo AM-GM)

Suy ra đpcm.

Bài 24: (USA MO 2017 ngày 2)

Cho $a, b, c, d \geq 0; a+b+c+d=4$. Tìm GTNN:

$$P = \sum_{cyc} \frac{a}{b^3 + 4}$$

Lời giải:

Để ý rằng:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 4} &= \frac{3-x}{12} + \frac{x(x-2)^2(x+1)}{12(x^3+4)} \\ \Rightarrow \sum \frac{a}{b^3+4} &\geq \frac{3(a+b+c+d) - (a+c)(b+d)}{12} \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Sử dụng BĐT AM-GM ta có:

$$(a+c)(b+d) \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{4} = 4$$

Hoàn tất chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $(a, b, c, d) = (2, 2, 0, 0)$ và các hoán vị tương ứng.

Bài 25: (Jack Garfunkel)

Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Lời giải:

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$

Từ đó ta có $(a+b)(b+c)(c+a) \leq 2b(a+c)^2$

(Cái này là biến đổi tương đương, các bạn thử tách ra nhé 😊)

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{4ac}{(a+c)^2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(a^2 + c^2 - ab - bc)^2}{(ab + bc + ca)(a+c)^2} \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$; $c=0$ và các hoán vị.

Mở rộng: Bài toán. Cho $a, b, c \geq 0$; $c = \min\{a, b, c\}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2 \frac{2c(a-b)^2}{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Sử dụng PP SOS, tuy nhiên theo tôi cách phân tích của phương pháp này chủ yếu cần đến công cụ tính toán và thiếu tự nhiên cũng như không có tính tư duy trong đó

$$VT - VP = \frac{\left[(ab + 2bc + 5ca)(a-c) + (2a^2 + 3ab + 3bc)(b-c) \right] (a-b)^2 + 3c^2(a+b)(a-c)(b-c)}{3(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)}$$

Bài 26: Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c .

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sum \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} \geq ab + bc + ca$$

Lời giải:

Giả sử: $a = \max\{a, b, c\}$

* Chứng minh về đầu tiên.

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 - \sum \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} = S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2$$

$$\text{Trong đó: } S_a = \frac{ab + bc + ca - a^2}{2(a+c)(b+a)}; S_b = \frac{ab + bc + ca - b^2}{2(b+a)(b+c)}; S_c = \frac{ab + bc + ca - c^2}{2(a+c)(b+c)}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} a^2 S_b + b^2 S_a &= \frac{1}{2(a+b)} \left(\frac{a^2(ab + bc + ca - b^2)}{(b+c)} + \frac{b^2(ab + bc + ca - a^2)}{(a+c)} \right) \\ &\geq \frac{1}{2(a+b)} \left(\frac{a^2(ab + bc + ca - b^2)}{(a+c)} + \frac{b^2(ab + bc + ca - a^2)}{(a+c)} \right) \end{aligned}$$

Nên ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sum \frac{a(b^2 + c^2)}{b + c}$$

*Chứng minh về thứ 2.

Ta có:

$$\sum \frac{a(b^2 + c^2)}{b + c} - ab + bc + ca = \sum \frac{c^2(a - b)^2}{(a + c)(b + c)} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh thành công.

Bài 27: (Đề thi đại học khối B năm 2010)

Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của:

$$A = 3 \sum a^2 b^2 + 3 \sum ab + 2 \sqrt{\sum a^2}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } VT \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}$$

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca (t \in [0; \frac{1}{3}]) \text{ Dễ thấy } f(t) \geq f(0) = 2$$

$$\text{Nên } VT \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1; b=c=0$ và các hoán vị

Bài 28: Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + \frac{a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{c}{a+b}} \geq 1 + 2\sqrt{2}$$

Lời giải:

Bài này tương đối khó .

Chuẩn hóa $a+b+c=2$. GT có thể viết lại thành $ab+bc+ca=1$.

$$\text{BĐT cần CM tương đương với : } \sum \frac{1}{\sqrt{a+b}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Đến đây ta có BĐT sau (Với gs a max): } \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{(b+c)^2+1}}$$

(CM cái này các bạn bình phương lên là đc, quá dài mình k trình bày ở đây)

$$\text{Từ đây suy ra } \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}} \geq \sqrt{b+c} + \sqrt{\frac{b+c}{(b+c)^2+1}}$$

$$t = \sqrt{b+c} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \quad (t \geq 2)$$

Đến đây quy hàm một biến

CM BĐT 1 biến cuối cùng đơn giản chỉ áp dụng BĐT AM-GM quen thuộc.

Bài 29: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq 8$$

Lời giải:

Ta chuẩn hóa $a+b+c=3$ thu được

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} = \frac{1}{3} + \frac{8a+6}{3a^2-6a+9} \leq \frac{1}{3} + \frac{8a+6}{6}$$

$$P \leq 1 + \frac{8(a+b+c)+18}{6} = 8$$

Từ đó ta có đpcm.

Bài 30: Cho a, b, c là 3 số dương và $2(ab+bc+ca)=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^2}{\sqrt{a^3+1}+1} \geq 3$$

Lời giải:

Ta có:

$$2(ab+bc+ca)=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Xét đánh giá đặc trưng: } \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}+1} \geq \frac{2x-2}{x} \Leftrightarrow x^4(x-2)^2 \geq 0$$

Dễ thấy đánh giá trên đúng, nên suy ra được:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^3+1}+1} \geq \sum_{cyc} \frac{2a-2}{a} = 3$$

Vậy ta có đpcm.

Bài 31: Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$3 \sum a^2 \sum a^2 b^2 \geq \sum (a^2 + ab + b^2)$$

Lời giải:

$$VT - VP = \frac{1}{4} \sum \left[(a+b-c)^2 + 5a^2 + 5b^2 + c^2 \right] c^2 (a-b)^2 \geq 0$$

Bài 32: Sau đây là một số bài tập

a) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a+b+c \geq 2$ Chứng minh rằng:
 $ab(a+1) + bc(b+1) + ca(c+1) \geq 2$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa : $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = a^2(b-c) + b^2(c-b) + c^2(1-c)$

c) (đề thi vào chuyên Toán chuyên Phan Bội Châu)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b \geq 0$; $c \geq 1$; $a+b+c=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = (6-a^2-b^2-c^2)(2-abc)$

Bài 33: (Lê Khánh Sỹ)

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+3} + \frac{ab+bc+ca}{4} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng:

$$a = \max \{a, b, c\} \Rightarrow a \geq 1$$

Đặt

$$f(a, b, c) = \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+3} + \frac{ab+bc+ca}{4} - \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) &= \frac{(b-c)^2 (144 - (b+3))(c+3)(b+c+6)}{16(b+3)(c+3)(b+c+6)} \\ &= \frac{(b-c)^2 (bc + 3(3-a) + 9)(9-a)(9-a)}{16(b+3)(c+3)(b+c+6)} \geq \frac{(b-c)^2 (a^3 - 27a^2 + 243a - 153)}{64(b+3)(c+3)(b+c+6)} \geq 0 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có:

$$f\left(a, \frac{3-a}{2}, \frac{3-a}{2}\right) = \frac{(a-1)^2 (3a^2 - 18a + 27)}{16(a+3)(9-a)} \geq 0$$

Vậy BĐT được chứng minh.

Bài 34: Cho ba số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+bc+ca-1)^2$$

Lời giải:

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) - (ab+bc+ca-1)^2 \geq 0$

$$a^2b^2c^2 - 2a^2bc + a^2 - 2ab^2c - 2abc^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow (abc - a - b - c)^2 \geq 0$$

BDT cuối đúng nên ta có đpcm.

Bài 35: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{6}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

(Chưa có lời giải)

Bài 36: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &\geq a^2 b^2 (a + b) \Rightarrow \sum \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \sum \frac{ab}{a^2 b^2 (a + b) + ab} \\ &= \sum \frac{abc}{ab(a + b) + abc} = \sum \frac{c}{a + b + c} = 1 \end{aligned}$$

Bài 37: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác tù. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 10$$

(Chưa có lời giải)

Bài 38: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$

Đặt $\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z} \right) = (a; b; c) \Rightarrow ab + bc + ca = 1$

Bài toán quy về chứng minh

$$P = \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{9}{4}$$

Ta có:

$$P = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2b}{\sqrt{4(b+c)(b+a)}} + \frac{2c}{\sqrt{4(c+a)(c+b)}} \\ \leq_{AM-GM} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{4(b+c)} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{c}{4(c+b)} + \frac{c}{c+a} \right) = \frac{9}{4}$$

Suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{15}, y = z = \frac{\sqrt{15}}{7}$

Bài 39: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{5}$. Chứng minh rằng:

$$\left| (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \right| \leq \sqrt{5}$$

Lời giải:

$$\text{Đặt } P = \left| (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) \right|$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ ta chỉ cần xét $b \geq a$

Đặt

$$x = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + c^2}$$

$$y = \sqrt{b^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{y^2 + c^2}$$

$$\text{Khi đó: } a + b + c = \sqrt{5} + \sqrt{x^2 + c^2} + \sqrt{y^2 + c^2} + c \geq x + y$$

$$\text{Và } P \leq x^2 y^2 (y^2 - x^2)$$

$$\text{Mà } 4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2.$$

Từ đó áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$P^2 \leq (x + y)^2 . xy . xy . xy . xy . (x - y)^2 \\ \leq (x + y)^2 \left[\frac{4xy + (x - y)^2}{5} \right]^5 = \frac{(x + y)^{12}}{3125} \leq 5$$

Từ đây ta có: $P \leq \sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}; 0 \right)$ và các hoán vị

Kết thúc chứng minh.

Bài 40: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Lời giải:

Áp dụng AM-GM cho 3 số dương:

$$\begin{aligned} VT &= \sum \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a} \right) - 1 \geq \sum \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \\ &= \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \geq 3 - 1 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} = VP \end{aligned}$$

Bài 41: Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $abc=1$

Chứng minh rằng:
$$\sum \frac{1}{\sqrt{2a^2 + 6a + 1}} \geq 1$$

Lời giải:

Hướng 1: Chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2 + 6a + 1}} \geq \frac{1}{a^{\frac{10}{9}} + a^{\frac{5}{9}} + 1}$$

(cách này dùng hệ số bất định kết hợp với đạo hàm có thể không phù hợp)

Hướng 2: Đổi biến

$$(a, b, c) \rightarrow \left(\frac{bc}{a^2}, \frac{ca}{b^2}, \frac{ab}{c^2} \right)$$

và đánh giá bằng bất đẳng thức Holder.

$$\left(\sum \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 6a^2bc + 2b^2c^2}} \right)^2 \sum a^2 (a^4 + 6a^2bc + 2b^2c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

Bài 42: Cho ΔABC có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{13}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$$

Lời giải:

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2a > 0; 1 - 2b > 0; 1 - 2c > 0$$

Theo BDT AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} 0 < (1-2a)(1-2b)(1-2c) &\leq \left[\frac{3-2(a+b+c)}{3} \right]^3 = \frac{1}{27} \\ \Rightarrow 0 < 1-2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc &\leq \frac{1}{27} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < 2(ab+bc+ca) - 4abc &\leq \frac{14}{27} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2+4abc) &\leq \frac{14}{27} \\ \Rightarrow \frac{13}{27} \leq a^2+b^2+c^2+4abc < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 43: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Chứng minh rằng:
$$\sum \frac{a}{a^3 + bc} \geq 3$$

Bài 44: (ASM-chuyên toán - 2015)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh:

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}$$

Bài 45: (IMO 2001)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1$$

Lời giải:

Theo Cauchy-Schwarz thì:

$$\begin{aligned} VT &= \sum \frac{a^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum a\sqrt{a^2 + 8bc}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(\sum a^3 + 24abc)}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3}} = VP \end{aligned}$$

Bài 46: 1.(Albania TST 2012)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 9} + \frac{1}{y^2 - 4y + 9} + \frac{1}{z^2 - 4z + 9}$$

Trong đó x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn x+y+z=1.

Lời giải:

Ta có bổ đề:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 9} \leq \frac{x}{18} + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \geq 0$$

BĐT cuối luôn đúng nên bổ đề được chứng minh

Áp dụng, ta có:

$$\sum \frac{1}{x^2 - 4x + 9} \leq \frac{x+y+z}{18} + \frac{3}{9} = \frac{7}{18}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0; z = 1$ và các hoán vị

2. Cho các số thực a,b,c >0 và abc=1. Chứng minh rằng :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 9(a^3 + b^3 + c^3)$$

Lời giải:

Viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 9abc(a^3 + b^3 + c^3)$$

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$9abc(a^3 + b^3 + c^3) \leq \left(ab + ca + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3a} \right)^3$$

Ta cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ca + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3a}$

thu gọn thành $\frac{(2a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{3a} \geq 0$

Hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 47: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 1$

Chứng minh rằng: $a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq -\frac{9}{4}$

Lời giải:

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{3}{4a} \geq a^2 + \frac{9}{4}$$

Do $a + b \leq 1$ nên $4ab \leq 1$ và ta có đánh giá $\frac{a}{b} \geq 4a - 4ab \geq 4a - 1$

Đưa về BĐT. Đúng vì nó tương đương với $\Leftrightarrow (3 - a)(2a - 1)^2 \geq 0$

Bài 48: Cho các số thực a, b, c thỏa : $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = a^2(b - c) + b^2(c - b) + c^2(1 - c)$
(Chưa có lời giải)