GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A.TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

Giới hạn hữu hạn

1.Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c: hằng số)

2.Định lí:

a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$

thì: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L + M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L - M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu M ≠ 0)

b) Nếu f(x) ≥ 0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

thì L ≥ 0 và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

c) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = \left|L\right|$

3.Giới hạn một bên:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực

1.Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|} = +\infty$

2.Định lí:

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \pm\infty$. Bảng sau:

$\lim f(x)$	$\lim f(x)$	$\lim f(x).g(x)$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ thì:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. Bảng sau:

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	0	+	$+\infty$
+		-	$-\infty$
-		+	$-\infty$
-		-	$+\infty$

* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

B.MỘT SỐ VẤN ĐỀ - DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ:

Vấn đề	Dạng toán	Phương pháp giải
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{M}, M\neq 0, L\neq 0$	Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{L}{M}$
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{M}, M\neq 0$	Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{0}, L\neq 0$	Áp dụng 2 quy tắc giới hạn vô cực: - Quy tắc 1. - Quy tắc 2.
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{0}$	- Nhóm nhân tử chung: $x-x_0$. - Nhân thêm lượng liên hiệp. - Thêm, bớt số hạng vắng.
	$P(x_0).Q(x_0)=0.\infty$	- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.
	$P(x_0)-Q(x_0)=\infty-\infty$	- Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{M}, M\neq 0, L\neq 0$	Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{L}{M}$
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{M}, M\neq 0$	Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{0}, L\neq 0$	Áp dụng 2 quy tắc giới hạn vô cực: - Quy tắc 1. - Quy tắc 2.
	$\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{0}$	- Nhóm nhân tử chung: $x-x_0$. - Nhân thêm lượng liên hiệp. - Thêm, bớt số hạng vắng.
	$P(x_0).Q(x_0)=0.\infty$	- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.
	$P(x_0)-Q(x_0)=\infty-\infty$	- Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=\pm\infty$	- Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x. - Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.
	$\infty-\infty$	- Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.
	$0.\infty$	- Tổng hợp các phương pháp trên.

Chú ý: Đối với hàm số lượng giác thì cũng có các dạng tương tự và vận dụng công thức: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

C.VÍ DỤ VẬN DỤNG:

Vấn đề 1: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Dạng 1: $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{M}, M\neq 0, L\neq 0$.

Phương pháp: Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{L}{M}$

Ví dụ 1:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\dfrac{1^3-8}{1^2-4}=\dfrac{-7}{-3}=\dfrac{7}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\dfrac{2-\sqrt{4-3}}{3}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{-3+1}-\sqrt{1+3}}{-3}=\dfrac{2+\sqrt[3]{2}}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\dfrac{|2-3|}{2.3^2-5.3+2}=\dfrac{1}{5}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$

b) $\lim\limits_{x\to (-1)^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\sin\dfrac{1}{2}$

Dạng 2: $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{M}, M\neq 0$.

Phương pháp: Thế x_0 vào $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{0}{M}=0$

Ví dụ 2:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+4}=\dfrac{2^3-8}{2^2+4}=\dfrac{0}{8}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x+1}=\dfrac{2-\sqrt{4-0}}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{0+1}-\sqrt{1+0}}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+1}=\dfrac{\sin 0}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+1}=\dfrac{|2-2|}{2.2^2-5.2+1}=\dfrac{0}{-1}=0$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2+x^3}{1+x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+8}-2}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+x^2+x^3}{1+x}$ b) $\lim\limits_{x\to (-1)^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+}\dfrac{\sin x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to (-4)^+}\dfrac{\sqrt{x+8}-2}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\cos x}$

Dạng 3: $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{L}{0}, L\neq 0$.

Phương pháp: Áp dụng 2 quy tắc giới hạn vô cực:

- Quy tắc 1.
- Quy tắc 2.

Ví dụ 3:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-8}{x-2}=-\infty$ Do: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-8)=-6\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\\ x-2>0,\ \forall x>2\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-8}{(x-2)^2}=-\infty$ Do: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}(x-8)=-6\\ \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0\\ (x-2)^2>0,\ \forall x\end{cases}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2+x^3}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{(x-1)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+1|}{(x^4+x-2)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{(x-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{(x-1)^4}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+2}{(x-2)^4}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}+\sqrt{3x-2}}{(x-2)^6}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^4}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x+x^2+x^3}{1+x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x+1|}{x^4+2x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}+1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}+1}{x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x+6}+2}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}+\sqrt{3x-2}}{2-x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x}$

Dạng 4: $\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}=\dfrac{0}{0}$.

<u>Phương pháp:</u>

- Nhóm nhân tử chung: $x-x_0$.
- Nhân thêm lượng liên hiệp.
- Thêm, bớt số hạng vắng.

Ví dụ 4:

a) L = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x), Q(x) là các đa thức và $P(x_0)=Q(x_0)=0$.

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

b) L = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc.

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$

c) L = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ và P(x) là biêåu thức chứa căn không đồng bậc

Giả sử: P(x) = $\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ *với* $\sqrt[m]{u(x_0)}=\sqrt[n]{v(x_0)}=a$.

Ta phân tích P(x) = $\left(\sqrt[m]{u(x)}-a\right)+\left(a-\sqrt[n]{v(x)}\right)$.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to (-1)^+}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$

Bài tập 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$. c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

Bài tập 4: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$. c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ h) $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

Bài tập 5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Bài tập 6: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Dạng 5: $P(x_0).Q(x_0)=0.\infty$ $(\lim\limits_{x\to x_0}P(x).Q(x))$

<u>Phương pháp:</u> Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

Ví dụ 5:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}(x-\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{x}{x^2-2}}$ e) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}(x-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{x}{x^2-3}}$ e) $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-25}}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-9}}$ b) $\lim\limits_{x\to 4^-}(x-4)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

d) $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-}(x-\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{x}{x^2-2}}$ e) $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})^+}(x-\sqrt{3})\sqrt{\dfrac{x}{x^2-3}}$ e) $\lim\limits_{x\to 5^-}(x-5)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-25}}$

Dạng 6: $P(x_0)-Q(x_0)=\infty-\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0}(P(x)-Q(x))$)

Phương pháp: Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

Ví dụ 6:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{-1-x}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{-1-x}=-\dfrac{1}{2}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{5-x}-\dfrac{10}{25-x^2}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{1}{4-x}-\dfrac{8}{16-x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\dfrac{1}{5-x}-\dfrac{10}{25-x^2}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

Vấn đề 2: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Dạng 1: $\dfrac{\infty}{\infty}$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=\pm\infty$.

Phương pháp:

- Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.
- Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

Chú ý:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}k & khi\ \deg(P(x))=\deg(Q(x))\\ 0 & khi\ \deg(P(x))<\deg(Q(x))\\ \pm\infty & khi\ \deg(P(x))>\deg(Q(x))\end{cases}$$

Ví dụ 1:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1}=2$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$

Dạng 2: $\infty-\infty$ ($\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(P(x)-Q(x)\right)$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=\pm\infty$ và giới hạn này thường có chứa căn)

<u>Phương pháp:</u> Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

Ví dụ 2:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+x^2-x^3}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{1+x^2-x^3}+x^2}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}+1}=\frac{1}{3}$$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-\sqrt{x^2+x+2}\right)$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}+x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+10}+x^2\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)$

Dạng 3: $0.\infty$ ($\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(P(x).Q(x)\right)$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=\pm\infty$ và giới hạn này thường có chứa căn)

<u>Phương pháp:</u> Tổng hợp các phương pháp trên.

Ví dụ 2:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{x-2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}+1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2+2}+x^2-1}{x^2+1}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=+\infty$$

Do: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}} = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3} < 0,\ \forall x < 0 \end{cases}$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\left(\dfrac{x^2-2}{x^4+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{x^2+2}{x^3+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{x+2}{x^3+1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}+1}{x^3+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\dfrac{\sqrt{x^4+2}+x^2}{x^3+1}\right)$

Bài tập 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\left(\dfrac{x-3}{x^2+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)\left(\dfrac{x^2-2}{x^4+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left(\dfrac{x^2+2}{x^3+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left(\dfrac{x+2}{x^3+1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}+1}{x^3+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\left(\dfrac{\sqrt{4x^4+2}+x^2}{x^3+1}\right)$

Vấn đề 3: Mối quan hệ giữa giới hạn một bên và giới hạn tại một điểm.

<u>Phương pháp:</u>

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
- Sử dụng các cách tính giới hạn của hàm số.

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & khi\ x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & khi\ x \le 0 \end{cases} \quad tại\ x = 0$$

<u>Giải:</u>

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Do: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2: Tìm giá trị của m để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{x+2} & khi\ x < 1 \\ mx+2 & khi\ x \ge 1 \end{cases} \quad tại\ x = 1$$

Giải:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x+3}{x+2}\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2) = m+2$

Do: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $m+2=2 \Leftrightarrow m=0$

Bài tập vận dụng:

Bài tập 1: Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & khi\ x>0 \\ \dfrac{3}{2} & khi\ x\le 0 \end{cases}$ $tại\ x=0$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{x-3} & khi\ x<3 \\ 1-x & khi\ x\ge 3 \end{cases}$ $tại\ x=3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{8-x^3} & khi\ x>2 \\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & khi\ x<2 \end{cases}$ $tại\ x=2$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1 \\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\le 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$

Bài tập 2: Tìm giá trị của m để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & khi\ x<1 \\ mx+2 & khi\ x\ge 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\ x>1 \\ m^2x^2-3mx+3 & khi\ x\le 1 \end{cases}$ $tại\ x=1$

c) $f(x) = \begin{cases} x+m & khi\ x<0 \\ \dfrac{x^2+100x+3}{x+3} & khi\ x\ge 0 \end{cases}$ $tại\ x=0$ d) $f(x) = \begin{cases} x+3m & khi\ x<-1 \\ x^2+x+m+3 & khi\ x\ge -1 \end{cases}$ $tại\ x=-1$