

Olympic gấp gỗ toán học 2017 khối 10

Phạm Quốc Sang

Cựu học sinh trường THPT Chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh Quảng Nam

Phạm Hữu Hiệp

Cựu học sinh trường THPT Chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang

Do thời gian gấp rút nên bài viết khó tránh khỏi những sai sót. Mong các bạn thông cảm và góp ý để bài viết được hoàn thiện hơn.

Bài 1

An và Bình là hai bạn cùng lớp chuyên toán. Khi Bình hỏi địa chỉ nhà An, để thử tài bạn, An đã cho những thông tin sau " Nhà tớ ở trên đường Trần Hưng Đạo. Số nhà tớ là một số có 3 chữ số khác nhau. Từ 3 chữ số này có thể tạo ra 5 số có 3 chữ số khác nhau nữa và điều thú vị là tổng của 5 số này đúng bằng 2017". Sau một lúc tính toán thì Bình đã tìm ra số nhà An. Còn bạn, bạn có thể tìm ra số nhà An không?

Lời giải. Gọi số nhà cần tìm là $\overline{abc}$.

Theo giả thiết bài toán ta suy ra $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ và a, b, c đôi một khác nhau. (*).

Khi đó 5 số khác có thể tạo từ 3 số a, b, c là $\overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$.

Khi đó tổng của 6 số lập từ 3 số a, b, c thỏa điều kiện (*) là $222(a + b + c)$.

Theo đề bài ta có

$$222(a + b + c) - \overline{abc} = 2017.$$

Do $100 \leq \overline{abc} \leq 999$ nên ta suy ra:

$$10 \leq a + b + c \leq 13.$$

Kết hợp điều kiện (*) ta suy ra $\overline{abc} = 425$. ■

Bài 2

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b(a+c)} + \frac{b}{c(b+a)} + \frac{c}{a(c+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Cách 1. Theo bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm ta có:

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{a.b.c}{a.b.c(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Mặt khác cũng áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm ta có:

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{2(a+b+c)}{3}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(a+b+c) \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3.$$

Vậy

$$VT \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$a+b+c \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b(c+a)} = \sum_{cyc} \frac{\frac{a}{b}}{c+a} \geq \frac{\left(\sum \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{\left(3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}}}\right)^2}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm ta có :

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{a.b.c}{a.b.c(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Ta chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc \Rightarrow q = \frac{p^2-3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Schur ta có:

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9r \geq 0. \quad (1)$$

Ta có (*) tương đương với

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \leq 8 \Leftrightarrow pq - r \leq 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều cần chứng minh là

$$\begin{aligned} pq - r &\leq 8 \Leftrightarrow pq - \frac{p(4q - p^2)}{9} \leq 8 \\ &\Leftrightarrow p^3 + 5pq \leq 72 \\ &\Leftrightarrow 2p^3 + 5p(p^2 - 3) \leq 144 \\ &\Leftrightarrow (p - 3)(p^2 + 21p + 48) \leq 0. \end{aligned}$$

Hiển nhiên $p \leq 3$ (do $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \Rightarrow a + b + c \leq 3$).

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 4. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có:

$$\frac{a}{b(a + c)} + \frac{a + c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Tương tự

$$\begin{aligned} \frac{b}{c(b + a)} + \frac{b + a}{4} &\geq \sqrt{\frac{b}{c}}. \\ \frac{c}{a(c + b)} + \frac{c + b}{4} &\geq \sqrt{\frac{c}{a}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$VT \geq \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right) - \frac{a + b + c}{2}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}}} = 3.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$a + b + c \leq 3.$$

$$\text{Vậy } VT \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại C . Gọi F là đường cao hạ từ C xuống AB . Đường tròn ω tiếp xúc với đoạn FB tại điểm P , đường cao CF tại điểm Q và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm R . Chứng minh rằng các điểm A, Q, R thẳng hàng và $AP = AC$.

Lời giải.

Ta có

$$\widehat{RQI} = \frac{180^\circ - \widehat{RIQ}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{ROA}}{2} = \widehat{RAO}.$$

Suy ra A, Q, R thẳng hàng.

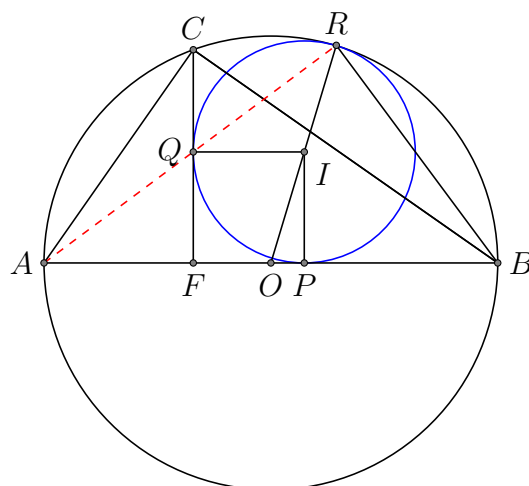
Xét tam giác ACQ và ABQ có

$$\begin{aligned} &\widehat{CAQ}, \text{ chung;} \\ &\widehat{ACQ} = \widehat{ARC} (= \widehat{ABC}). \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle ACQ \sim \triangle ARC$. Khi đó

$$AC^2 = AQ \cdot AR = AP^2.$$

Vậy $AC = AP$. ■



Bài 4

Người ta tô màu m ô vuông trên bảng ô vuông 1001×1001 sao cho

- Trong hai ô vuông kề nhau luôn có ít nhất một ô vuông được tô màu.
- Cứ 6 ô vuông liên tiếp trên cùng một hàng hoặc cùng một cột có ít nhất hai ô kề nhau được tô màu.

Tìm giá trị nhỏ nhất của m để có thể thực hiện được cách tô trên.

Lời giải. Ta chứng minh hình chữ nhật 1×5 có ít nhất 3 ô được tô màu.

Theo điều kiện a) thì hình chữ nhật 1×5 sẽ có hai trường hợp xảy ra:

TH1. (không tô)(tô)(không tô)(tô)(không tô).

Ta xét hình chữ nhật 1×6 chứa hình chữ nhật 1×5 theo ý b) sẽ có ít nhất 2 ô kề nhau được tô màu. Điều này vô lí với cách tô như trên do 2 đầu của hình chữ nhật 1×5 không tô màu.

TH2. (tô)(không tô)(tô)(không tô)(tô).

Điều này có nghĩa 1 hình chữ nhật 1×5 luôn tồn tại ít nhất 3 ô được tô màu.

Với trường hợp này ta chia bảng ô vuông thành các hình chữ nhật như sau:

$$1000 \times 1001 + 1000 \times 1 + 1 \times 1. \quad (\text{chia thành các hình chữ nhật con})$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Ta có $1000 \times 1001 = 200200 \times 5$ tức có 200200 hình chữ nhật kích thước 1×5 nên sẽ có ít nhất $200200.3 = 600600$ ô được tô màu.
- Ta có $1000 \times 1 = 200 \times 5$ tức có 200 hình chữ nhật kích thước 1×5 nên sẽ có ít nhất $200.3 = 600$ ô được tô màu.

Do đó sẽ có ít nhất $600600 + 600 = 601200$ ô được tô màu. ■

Nguồn tham khảo

1. diendantoanhoc.net
2. <https://www.facebook.com/groups/Loicenter/permalink/1560806647325837/>