

Các bài toán về tập hợp

Trương Phước Nhân 12/07/2017

1. Bài toán cơ bản :

Bài toán 1: Cho F là một họ hữu hạn các tập con của một tập hữu hạn X . Gọi $d(x)$ số các thành viên của họ F chứa x và gọi là bậc của x với x là một phần tử bất kì.

Chứng minh rằng :

- a) $\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{A \in F} |A|$
b) $\sum_{x \in Y} d(x) = \sum_{A \in F} |Y \cap A|$ với $Y \subseteq X$.
c) $\sum_{x \in X} d^2(x) = \sum_{A \in F} \sum_{x \in A} d(x) = \sum_{A \in F} \sum_{B \in F} |A \cap B|$

Lời giải:

a) Xét ma trận liên thuộc $M = (m_{x,A})$ của họ F , có nghĩa là M là một ma trận 0-1 với $|X|$ hàng được đánh số bởi các phần tử $x \in X$ và $|F|$ cột được đánh số bởi các tập $A_i \in F$ với $m_{x,A}$ bằng 1 hoặc 0 tùy thuộc vào $x \in A$ hay $x \notin A$. Khi đó $d(x)$ chính là số các số 1 nằm trên x -hàng, còn $|A|$ là số các số 1 nằm trên A -hàng.

b) Xét ma trận liên thuộc $M = (m_{x,A})$ của họ F trên tập Y , có nghĩa là M là một ma trận 0-1 với $|Y|$ hàng được đánh số bởi các phần tử $x \in Y$ và $|F|$ cột được đánh số bởi các tập $A_i \in F$ với $m_{x,A}$ bằng 1 hoặc 0 tùy thuộc vào $x \in A$ hay $x \notin A$. Khi đó $d(x)$ chính là số các số 1 nằm trên x -hàng, còn $|Y \cap A|$ là số các số 1 nằm trên A -hàng.

c) Xét ma trận liên thuộc $M = (m_{x,A})$, với $|Y|$ hàng được đánh số bởi các phần tử $x \in Y$ và $|F|$ cột được đánh số bởi các tập $A_i \in F$ với $m_{x,A}$ bằng $d(x)$ hoặc 0 tùy thuộc vào $x \in A$ hay $x \notin A$. Khi đó $d^2(x)$ chính là tổng các số điền trên x -hàng, còn $\sum_{x \in A} d(x)$ là tổng các số điền trên A -hàng.

Ta đã chứng minh được : $\sum_{x \in X} d^2(x) = \sum_{A \in F} \sum_{x \in A} d(x)$.

Áp dụng kết quả câu b) ta thu được : $\sum_{x \in A} d(x) = \sum_{B \in F} |A \cap B| \Rightarrow \sum_{A \in F} \sum_{x \in A} d(x) = \sum_{A \in F} \sum_{B \in F} |A \cap B|$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2: (Corradi) Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập con r -phần tử và X là hợp của chúng. Nếu $|A_i \cap A_j| \leq k$ với $i \neq j$ thì $|X| \geq \frac{r^2 n}{r + (n-1)k}$.

Lời giải: Sử dụng kết quả của bài toán 1 :

$$\sum_{x \in A_i} d(x) = \sum_{j=1}^n |A_i \cap A_j| = |A_i| + \sum_{j \neq i} |A_i \cap A_j| \leq r + k(n-1) \quad (*)$$

Lấy tổng theo tất cả các tập A_i , sử dụng bất đẳng thức Jensen ta được :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{x \in A_i} d(x) = \sum_{x \in X} d^2(x) \geq \frac{1}{|X|} \left(\sum_{i=1}^n |A_i| \right)^2 = \frac{(nr)^2}{|X|}$$

Kết hợp với bất đẳng thức (*) ta thu được : $n(r + k(n-1)) \geq \frac{(nr)^2}{|X|} \Rightarrow |X| \geq \frac{r^2 n}{r + k(n-1)}$, điều phải

chứng minh.

Bài toán 3: Cho X là một tập hợp gồm n phần tử, và gọi $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập con của X với kích thước trung bình lớn hơn hoặc bằng $\frac{n}{w}$. Nếu $m \geq 2w^2$ thì tồn tại cặp i, j phân biệt sao cho $|A_i \cap A_j| \geq \frac{n}{2w^2}$.

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Jensen, và kết quả của bài toán 1, ta thu được:

$$\sum_{x \in X} d^2(x) \geq \frac{1}{|X|} \left(\sum_{x \in X} d(x) \right)^2 = \frac{1}{|X|} \left(\sum_{i=1}^m |A_i| \right)^2 \geq \frac{nm^2}{w^2}$$

Giả sử điều phải chứng minh là sai, áp dụng các kết quả của bài toán 1, ta được:

$$\sum_{x \in X} d^2(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |A_i \cap A_j| = \sum_i |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| < nm + \frac{nm(m-1)}{2w^2} = \frac{nm^2}{2w^2} \left(1 + \frac{2w^2}{m} - \frac{1}{m} \right) \leq \frac{nm^2}{2w^2}$$

Điều mâu thuẫn này chỉ ra điều ta phải chứng minh.

2. Mặt phẳng xạ ảnh :

Bài toán 1: Cho F là một họ gồm các tập 3-phần tử, thỏa mãn:

i) Với hai tập hợp bất kì thuộc họ F giao nhau duy nhất 1 phần tử.

ii) Hai phần tử bất kì thuộc tập nền $X = \bigcup_{S \in F} S$ được chứa trong duy nhất một tập $S \in F$.

Giả sử rằng họ F chứa nhiều hơn một tập. Chứng minh rằng tập nền X có chính xác 7 phần tử.

Lời giải: Để đơn giản và thuận tiện trong việc trình bày lời giải ta quan niệm một phần tử bất kì là một “điểm” và một tập con thuộc họ F là một “đường thẳng”. Hai điều kiện trong bài toán trở nên quen thuộc đối với chúng ta:

i) Hai “đường thẳng” cắt nhau tại duy nhất một “điểm”.

ii) Hai “điểm” bất kì thuộc về duy nhất một “đường thẳng”.

Gọi l là số các “đường thẳng”, và n là số các phần tử thuộc tập nền. Sử dụng điều kiện ii), ta thu được:

Bổ đề 1: Số các “đường thẳng” bằng: $l = \frac{1}{3} \binom{n}{2}$.

Chứng minh bổ đề 1: Thật vậy, ta xây dựng một ánh xạ $f: 2-P \rightarrow L$, trong đó $2-P$ là họ tất cả các tập gồm 2 “điểm” phân biệt và L là tập hợp các “đường thẳng” theo quy tắc sau: cho tương ứng $\{a, b\}$ với đường thẳng d đi qua 2 “điểm” a, b (ánh xạ được đặt đúng theo điều kiện ii))

Nhận thấy: các tập 2-“điểm” là $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}$ cùng cho tương ứng với “đường thẳng” $d = \{a, b, c\}$

$$\text{nên } |2-P| = 3|L| \Rightarrow l = |L| = \frac{1}{3} \binom{n}{2}.$$

Bổ đề 2: Bậc của mọi “điểm” x luôn là: $d_x = \frac{n-1}{2}$, trong đó bậc của một “điểm” là số các “đường thẳng” phân biệt đi qua điểm đó.

Chứng minh bổ đề 2: Thật vậy, ta xây dựng một ánh xạ $g: 2-P_x \rightarrow L_x$, trong đó L_x là tập các “đường thẳng” đi qua “điểm” x còn $2-P_x$ chỉ các tập 2-“điểm” chứa x , theo quy tắc sau: cho tương ứng tập 2-“điểm” $\{x, a\}$ với đường thẳng đi qua hai điểm này (ánh xạ được đặt đúng theo điều kiện ii)).

Nhận thấy: các tập 2-“điểm” phân biệt $\{x, a\}, \{x, b\}$ cùng cho tương ứng với “đường thẳng” $d = \{x, a, b\}$

$$\text{Nên } |2-P_x| = 2|L_x| \Rightarrow d_x = |L_x| = \frac{n-1}{2}.$$

Tiếp theo, ta thực hiện đếm số các nhóm $\{d_1, d_2\}$ với d_1, d_2 là các “đường thẳng” phân biệt bằng hai cách:

Cách 1: Số các nhóm này hiển nhiên bằng $\binom{l}{2}$.

Cách 2: Ta đếm số các cặp “đường thẳng” phân biệt đi qua một “điểm” x bất kì bằng $\binom{d_x}{2}$. Khi đó, tổng

$\sum_{x \in X} \binom{d_x}{2}$ đếm số các nhóm 2-“đường thẳng” phân biệt, theo điều kiện i).

$$\text{Ta có đẳng thức sau: } \sum_{x \in X} \binom{d_x}{2} = \binom{l}{2}.$$

Thay $d_x = \frac{n-1}{2}$ và $l = \frac{1}{3} \binom{n}{2}$ ta thu được phương trình:

$$n \binom{\frac{n-1}{2}}{2} = \frac{l(l-1)}{2}$$

$$\Rightarrow n \frac{1}{2} \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)}{6} \cdot \frac{(n-3)(n-2)}{6}$$

$$\Rightarrow n=7$$

Một cấu hình tổ hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán là mặt phẳng Fano.

Bài toán 2: Một họ hữu hạn F gồm các r -tập con của tập cho trước được gọi là một mặt phẳng xạ ảnh nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

- Hai tập bất kì thuộc họ (ta sẽ gọi một r -tập thuộc họ F là đường thẳng) giao nhau duy nhất một phần tử.
- Hai phần tử bất kì thuộc tập nền $X = \bigcup_{S \in F} S$ được chứa trong duy nhất một đường thẳng.

Lưu ý : Đại lượng $N = r - 1$ được gọi là bậc của mặt phẳng xạ ảnh .

Chứng minh rằng:

- Số các đường thẳng = Số các phần tử của tập nền $= r^2 - r + 1 = N^2 + N + 1$.
- Bậc của mọi phần tử luôn bằng $r = N + 1$

Lời giải: Gọi L là số đường thẳng, số các thành phần của họ F , và gọi n là số các phần tử của tập nền. Khi đó , bằng lối lập luận tương tự như trong bài toán 1, ta thu được:

- Số các đường thẳng là $L = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{r}{2}}$

- Bậc của mọi phần tử x luôn bằng $d_x = \frac{n-1}{r-1}$.

Ta cũng thực hiện đếm bằng hai cách số các bộ gồm 2 đường thẳng phân biệt không kể đến thứ tự

Cách 1: Số đường thẳng bằng $\binom{L}{2}$

Cách 2: Ta đếm số các cặp “đường thẳng” phân biệt đi qua một “điểm” x bất kì bằng $\binom{d_x}{2}$. Khi đó, tổng

$\sum_{x \in X} \binom{d_x}{2}$ đếm số các nhóm 2-“đường thẳng” phân biệt

Ta lập được phương trình :

$$\sum_{x \in X} \binom{d_x}{2} = \binom{L}{2}$$

Thay các giá trị $d_x = \frac{n-1}{r-1}$ và $L = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{r}{2}}$ ta thu được phương trình :

$$n \binom{\frac{n-1}{r-1}}{2} = \frac{L(L-1)}{2}$$

$$\Rightarrow n \frac{1}{2} \frac{n-1}{r-1} \cdot \left(\frac{n-1}{r-1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{r(r-1)} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{r(r-1)} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow n \frac{1}{2} \frac{n-1}{r-1} \cdot \left(\frac{n-r}{r-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{r(r-1)} \cdot \frac{(n-r)(n+r-1)}{r(r-1)}$$

$$\Rightarrow n = r^2 - r + 1$$

Suy ra:

$$\text{Số các đường thẳng bằng : } \frac{n(n-1)}{r(r-1)} = \frac{(r^2-r+1)(r^2-r)}{r(r-1)} = r^2-r+1$$

$$\text{Bậc của một phần tử bất kì bằng : } \frac{n-1}{r-1} = \frac{r^2-r}{r-1} = r$$

Bài toán 3: Với mọi số nguyên tố p , luôn tồn tại một mặt phẳng xạ ảnh có bậc p .

Lời giải: Gọi V là tập hợp các vector (x_1, x_2, x_3) với các phần tử thuộc trường F_p , trong đó x_1, x_2, x_3 không đồng thời bằng 0. Ta đồng nhất tập $[x_1, x_2, x_3] = \{(cx_1, cx_2, cx_3) : c \in F_p, c \neq 0\}$, gồm $p-1$ vector với một điểm thuộc tập nên. Do đó có $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$ tập, hay nói cách khác có p^2+p+1 điểm.

Đường thẳng $L(a_1, a_2, a_3)$, trong đó $(a_1, a_2, a_3) \in V$, là tập hợp các điểm $(x_1, x_2, x_3) \in V$ sao cho

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (*)$$

Bởi vì $(a_1, a_2, a_3) \in V$ nên có ít nhất một thành phần không bằng 0, ta tạm gọi là a_1 . Phương trình (*) có p^2-1 nghiệm $(x_1, x_2, x_3) \in V$: Với x_2, x_3 bất kì, không đồng thời bằng 0, phương trình (*) xác định cho ta duy nhất một x_1 . Mỗi tập $[x_1, x_2, x_3]$ chứa $p-1$ vector nên có $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ điểm $[x_1, x_2, x_3]$ điểm thỏa mãn phương trình (*). Nói một cách khác thì mỗi đường thẳng chứa $p+1$ điểm.

Ta cần kiểm tra các tiên đề của mặt phẳng xạ ảnh:

1) Hai đường thẳng giao nhau tại một điểm:

Giả sử $L[a_1, a_2, a_3]$ và $L[b_1, b_2, b_3]$ là hai đường thẳng phân biệt. Gọi $[x_1, x_2, x_3]$ là một giao điểm (nếu có) của hai đường thẳng này. Khi đó:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_1 \neq 0$. Ta suy ra $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$, thay vào đẳng thức thứ hai ta

$$\text{được : } \left(b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1\right)x_2 + \left(b_3 - \frac{a_3}{a_1}b_1\right)x_3 = 0$$

Giả sử : $b_2 - \frac{a_2}{a_1}b_1 = b_3 - \frac{a_3}{a_1}b_1 = 0$. Suy ra $(b_1, b_2, b_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$ với $c = \frac{b_1}{a_1}$, do đó,

$L[a_1, a_2, a_3] \equiv L[b_1, b_2, b_3]$, mâu thuẫn. Do vậy có ít nhất biểu thức phải khác không, giả sử $b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 \neq 0$.

Thì với x_3 bất kì, cả x_2 và x_1 đều được xác định duy nhất bởi phương trình (**) và từ phương trình thứ nhất; và nếu (x_1, x_2, x_3) là một nghiệm thì (cx_1, cx_2, cx_3) với $c \neq 0$ là tất cả các nghiệm có thể có. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

2) Hai điểm bất kì xác định một đường thẳng:

Giả sử $[x_1, x_2, x_3]$ và $[y_1, y_2, y_3]$ là hai điểm phân biệt. Gọi $L(a_1, a_2, a_3)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm này, thì ta có :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \neq 0$. Thì ta suy ra $a_1 = -\frac{a_2}{x_1}x_2 - \frac{a_3}{x_1}x_3$, thay vào đẳng thức thứ hai ta

$$\text{được : } a_2\left(y_2 - \frac{y_1}{x_1}x_2\right) + a_3\left(y_3 - \frac{y_1}{x_1}x_3\right) = 0 \quad (**)$$

Nếu : $y_2 - \frac{y_1}{x_1} x_2 = y_3 - \frac{y_1}{x_1} x_3 = 0 \Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$ với $c = \frac{y_1}{x_1}$, do đó, $[y_1, y_2, y_3] \equiv [x_1, x_2, x_3]$,

mâu thuẫn. Do vậy có ít nhất biểu thức phải khác không, giả sử $y_2 - \frac{y_1}{x_1} x_2 \neq 0$. Thì với a_3 bất kì, cả a_2 và a_1

đều được xác định duy nhất bởi phương trình (**) và từ phương trình thứ nhất; và nếu (a_1, a_2, a_3) là một nghiệm thì (ca_1, ca_2, ca_3) với $c \neq 0$ là tất cả các nghiệm có thể có. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Lưu ý : Lập luận trên hoàn toàn đúng nếu ta thay trường F_p bởi một trường hữu hạn F_q bất kì. Trong lý thuyết đại số hiện đại, ta đã chứng minh được rằng : một trường hữu hạn bất kì có số phần tử là lũy thừa của một số nguyên tố, nên khẳng định của bài toán trên vẫn đúng với các lũy thừa p^n

3. Tài liệu tham khảo:

[1]. Martin Aigner, Turan Graph Theorem, ??/10/1995

[2]. Po- Shen Loh, Combinatorics of sets, ??/??/2011

[2]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.