

# Nguyên lý chồng bồ câu

Trương Phước Nhân, 09/07/2017

## 0. Phát biểu của nguyên lý:

**Nguyên lý chồng bồ câu:** Nếu ta nhốt  $m$  con bồ câu vào  $n$  cái chuồng ( giả sử  $m \geq n$  và  $m$  không chia hết cho  $n$ ) thì ta luôn tìm được một chuồng chứa ít nhất  $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$  con bồ câu.

**Chứng minh:** ( Sử dụng thuật toán chia) Giả sử phản chứng , tất cả các chuồng chỉ chứa tối đa  $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$  chú chim bồ câu .Do đó , với  $n$  chuồng thì chứa tối đa  $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor n$  chú chim bồ câu.

Áp dụng thuật toán chia ta được :  $m = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor n + r, 0 \leq r \leq n-1$ , nhưng theo giả thiết thì  $r > 0$ . Đến đây ta thu được điều vô lí , bởi vì trong  $n$  chuồng chỉ chứa  $m = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor n + r, r > 0$  chú chim bồ câu nhưng lại bé hơn hoặc bằng  $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor n$ .

## 1. Áp dụng trong lý thuyết tập hợp :

### Bài toán 1: ( Nguyên lý chồng bồ câu dạng đối ngẫu)

Cho tập hữu hạn  $S \neq \emptyset$  và  $S_1, S_2, \dots, S_n$  là các tập con của  $S$  sao cho  $|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| > k|S|$ . Khi đó, tồn tại một phần tử  $x \in S$  sao cho  $x$  là phần tử chung của  $k+1$  tập  $S_i$ .

**Lời giải :** Giả sử  $S$  có  $m$  phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Xét tập  $X = \{(x_i, S_j) | x_i \in S_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ .

Hiển nhiên  $|X| = |S_1| + \dots + |S_n| > k|S| = km$ . Ta phân phối các phần tử của tập  $X$  vào  $m$  hộp  $1, 2, \dots, m$  như sau :

Nếu  $x_i \in S_j$  thì  $(x_i, S_j)$  được phân phối vào hộp  $i$ . Theo nguyên lý chồng bồ câu, tồn tại một hộp  $i$  có ít nhất  $\left\lfloor \frac{km+1}{m} \right\rfloor + 1 = k+1$  phần tử. Từ đó suy ra tồn tại phần tử  $x$  là phần tử chung của  $k+1$  tập  $S_i$ .

### Bài toán 2: Chứng minh lại nguyên lý chồng bồ câu từ nguyên lý đối ngẫu của nó.

#### Lời giải :

Giả sử các phần tử là  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ta phân phối các phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vào  $m$  hộp  $B_i, i = \overline{1, m}$ .

Kí hiệu  $S = \{B_i | i = \overline{1, 2, \dots, m}\}$ ,  $S_j = \{B_i | j \in B_i\}, j = \overline{1, n}$ . Hiển nhiên  $|S_j| = 1, j = \overline{1, n}$  và  $|S| = m$ . Suy ra

$|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n| = n > km > k|S|$ . Theo nguyên lý chồng bồ câu tồn tại hai phần tử  $B_i$  chung của  $k+1$  tập  $S_j$ , tức là tồn tại  $B_i$  chứa ít nhất  $k+1$  phần tử.

## 2. Áp dụng cho các bài toán số học :

**Bài toán 1:** Cho trước  $n$  số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Chứng minh rằng ta có thể chọn được một số số có tổng chia hết cho  $n$ .

**Lời giải :** Gọi  $s_n$  là dãy tổng riêng của  $a_n$ , có nghĩa là  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  với  $i = \overline{1, n}$ . Giả sử tồn tại một chỉ số  $i$  sao cho  $s_i \equiv 0 \pmod n$  ta có điều phải chứng minh. Nếu không có  $s_i$  nào chia hết cho  $n$ , khi đó dư của các số  $s_i$  khi chia cho  $n$  thuộc tập  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ . Áp dụng nguyên lý chồng bồ câu ta tìm được hai số  $a_j, a_k (j < k)$  sao cho  $a_k - a_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_k \equiv 0 \pmod n$  suy ra được điều phải chứng minh.

**Bài toán 2:** Cho tập  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , chọn ra  $n+1$  số bất kì. Chứng minh rằng ta luôn tìm được hai số trong chúng nguyên tố cùng nhau.

**Lời giải:** Phân hoạch tập  $[2n]$  thành  $n$  nhóm :  $\{1; 2\}, \{3; 4\}, \dots, \{2n-1; 2n\}$ . Áp dụng nguyên lý chồng bồ câu ta tìm được hai số  $i, j$  trong  $n+1$  số được chọn sao cho  $\{i, j\} = \{k, k+1\}$  từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 3: (Erdos)** Cho  $A$  là một tập con gồm  $n+1$  số chọn từ tập  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ . Chứng minh rằng ta luôn tìm được hai số  $a_i, a_j$  thuộc  $A$  sao cho  $a_i \mid a_j$  hoặc  $a_j \mid a_i$ .

**Lời giải :** Thực hiện phân hoạch tập  $[2n]$  thành  $n$  nhóm sao cho mỗi nhóm này thỏa mãn tính chất : hai phần tử bất kì trong cùng một nhóm sẽ có một phần tử chia hết cho phần tử còn lại. Điều này ta có thể thực hiện được bằng cách phân hoạch

$\{1; 2; 4; 8; \dots\}, \{3; 6; 12; \dots\} \dots$  trong đó phần tử nhỏ nhất trong mỗi nhóm là một số lẻ và nhân số này cho 2 lần lượt thu được các số còn lại trong nhóm . Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu ta tìm được hai số  $i, j$  trong  $n+1$  số đã cho trong cùng một nhóm , từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 4: ( Schur )** Với mọi  $r \geq 2$  và với mọi cách tô màu các phần tử của tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  , trong đó  $n = \lfloor er! \rfloor$  bởi  $r$  màu, ta luôn tìm được bộ ba số nguyên  $x, y, z$  cùng màu sao cho  $x + y = z$ .

**Lời giải :** Giả sử  $c: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  là một  $r$ - tô màu của  $n$  số tự nhiên đầu tiên. Giả sử rằng không tồn tại các số nguyên dương  $x, y$  sao cho  $x + y \leq n$  và  $c(x) = c(y) = c(x + y)$ . Ta cần chứng minh  $n < er!$ .

Gọi  $c_0$  là màu được sử dụng nhiều nhất trong số  $n$  phần tử, và gọi  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_1-1}$  là các phần tử được tô màu  $c_0$ . Theo nguyên lý chuồng bồ câu, nếu  $n > rn_1$  thì phải có một màu được sử dụng cho  $n_1 + 1$  phần tử, mâu thuẫn với giả thiết về màu  $c_0$ , nên  $n \leq rn_1$ .

Xét tập  $A_0 = \{x_i - x_0 : 1 \leq i < n_1\}$ . Theo giả thiết của ta, không có bất kì số nào thuộc  $A_0$  được tô màu  $c_0$ . Do đó, tập  $A_0$  được tô bởi  $r-1$  màu. Gọi  $c_1$  là màu được sử dụng nhiều nhất để tô màu các phần tử của tập  $A_0$ , và gọi  $y_0 < y_1 < \dots < y_{n_2-1}$  là các phần tử được tô màu  $c_1$ . Lập luận tương tự, ta được  $n_1 - 1 \leq (r-1)n_2$ .

Xét tập  $A_1 = \{y_i - y_0 : 1 \leq i < n_2\}$ . Theo giả thiết của ta, không có bất kì số nào thuộc  $A_1$  được tô màu  $c_0$  và  $c_1$ . Do đó, tập  $A_1$  được tô bởi  $r-2$  màu. Gọi  $c_2$  là màu được sử dụng nhiều nhất để tô màu các phần tử của tập  $A_1$ , và gọi  $z_0 < z_1 < \dots < z_{n_3-1}$  là các phần tử được tô màu  $c_2$ . Lập luận tương tự, ta được  $n_2 - 1 \leq (r-2)n_3$ .

Lặp lại quá trình suy luận này. Bởi vì chỉ có  $r$  màu nên lập luận này phải dừng sau  $k = r$  bước. Ta thu được các đánh giá

$n \leq rn_1$  và  $n_i \leq (r-i)n_{i+1} + 1$  với  $i = \overline{1, k-1}$ , với  $n_k = 1$ . Ta suy ra

$$n \leq \sum_{i=0}^{r-1} r(r-1)(r-2)\dots(r-i) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{r!}{i!} < r! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = er!$$

### 3. Áp dụng cho bài toán đồng dư :

#### Bài toán 1: ( Fermat- Euler )

Chứng minh rằng nếu  $p$  là số nguyên tố có dạng  $4k+1$  thì tồn tại các số nguyên  $a, b$  sao cho  $p = a^2 + b^2$ .

#### Lời giải :

Áp dụng định lý Wilson, ta có :  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ . Vì  $p$  có dạng  $4k+1$  nên :  $(4k)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

Nhận thấy :

$$(4k)! + 1 = 1.2 \dots 2n.(2n+1) \dots (4n) + 1 = 1.2 \dots 2n.(p-2n)(p-2n+1) \dots (p-1) + 1 = (2n)!(-1)^{2n}(2n)! + 1 \equiv ((2n)!)^2 + 1 \pmod{p}$$

Bằng cách đặt  $N = (2n)!$  ta đã chứng minh được :  $N^2 \equiv -1 \pmod{p}$ .

Xét các số có dạng  $x + Ny$  với  $x, y$  là các số nguyên thuộc  $[0; \lfloor \sqrt{p} \rfloor]$ . Có tất cả  $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2$  số như vậy. Vì

$(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2 > p$  nên theo nguyên lý chuồng bồ câu, tồn tại hai cặp số  $(x, y), (x', y')$  sao cho

$x + Ny \equiv x' + Ny' \pmod{p}$ . Từ đây, suy ra :

$$x - x' \equiv N(y' - y) \pmod{p}$$

$$(x - x')^2 \equiv N^2(y' - y)^2 \pmod{p}$$

Sử dụng hệ thức  $N^2 \equiv -1 \pmod{p}$ , ta suy ra  $(x - x')^2 + (y' - y)^2 \equiv 0 \pmod{p}$

Lưu ý rằng :  $0 < (x - x')^2 + (y' - y)^2 < 2p$ . Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 2:** Với mọi số nguyên dương  $n \geq 1$ , tồn tại số  $p_0$  sao cho với mọi số nguyên tố  $p \geq p_0$ , phương trình  $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$  có nghiệm.

#### Lời giải :

Nhóm nhân  $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$  là một nhóm cyclic do đó nó có một phần tử sinh là  $g$ . Mọi phần tử thuộc  $\mathbb{Z}_p^*$  đều có thể biểu diễn dưới dạng  $x = g^{nj+i}$ , trong đó  $0 \leq i < n$ . Ta thực hiện tô màu cho các phần tử thuộc  $\mathbb{Z}_p^*$  bởi  $n$  màu, trong đó  $c(x) = i$  nếu  $x = g^{nj+i}$ . Áp dụng định lý Schur đối với  $p$  đủ lớn, tồn tại các phần tử  $x', y', z' \in \mathbb{Z}_p^*$  sao cho  $x' + y' = z'$  và  $c(x') = c(y') = c(z')$ .

Do đó,  $x' = g^{nj_x+i}, y' = g^{nj_y+i}, z' = g^{nj_z+i}$  và  $g^{nj_x+i} + g^{nj_y+i} = g^{nj_z+i}$ . Bằng cách đặt  $x = g^{j_x}, y = g^{j_y}, z = g^{j_z}$ , ta thu được một nghiệm của phương trình  $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ .

#### 4. Áp dụng vào lý thuyết số :

**Bài toán 1: ( Dirichlet )** Với mọi số thực  $x \in \mathbb{R}$  và  $n \in \mathbb{Z}^+$ , luôn tìm được số hữu tỉ  $\frac{p}{q}$  trong đó  $1 \leq q \leq n$  thỏa

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

**Lời giải :** Xét các số  $\{ax\}$ , là phần lẻ của số thực  $ax$ , và  $a$  là số nguyên chạy từ 1 đến  $n+1$ . Ta chia khoảng  $[0;1)$  thành  $n$  khoảng con  $\left[0; \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}; 1\right)$ . Theo nguyên lý chuồng bồ câu, tồn tại hai số  $\{ax\}, \{a'x\}$  nằm trong cùng một khoảng. Điều đó có nghĩa là  $|\{ax\} - \{a'x\}| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow |(ax - \lfloor ax \rfloor) - (a'x - \lfloor a'x \rfloor)| < \frac{1}{n}$ .

Bằng cách đặt  $q = a - a', p = \lfloor ax \rfloor - \lfloor a'x \rfloor$  ta được :  $|qx - p| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$ .

**Bài toán 2: ( Kronecker )** Cho  $x$  là một số vô tỉ, và đặt  $x_n = \{nx\}$  là phần lẻ của  $nx$ . Chứng minh rằng dãy số  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  trù mật trong khoảng  $[0;1)$ , có nghĩa là với mọi số thực  $r \in [0;1)$ , và với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại một số  $n$  sao cho  $|x_n - r| \leq \varepsilon$ .

**Lời giải :** Ta cần chứng minh rằng với mọi khoảng  $(a,b)$  thuộc  $[0;1)$ , ta luôn tìm được số nguyên dương  $n$  sao cho  $\{n\alpha\} \in (a;b)$ .

Đầu tiên, bằng cách đặt  $N = \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1$ , ta xét các số  $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$ . Theo nguyên lý chuồng bồ câu, ta tìm được hai số nguyên  $p, p'$  sao cho  $1 \leq p < q \leq N+1$  và  $|\{p\alpha\} - \{q\alpha\}| \leq \frac{1}{N}$  (áp dụng lại các lập luận ta đã dùng để chứng minh định lý Dirichlet).

Bằng các tính toán trực tiếp ta nhận ra rằng :

$\{q\alpha\} - \{p\alpha\} = q\alpha - \lfloor q\alpha \rfloor - p\alpha + \lfloor p\alpha \rfloor = (q-p)\alpha - \lfloor q\alpha \rfloor + \lfloor p\alpha \rfloor$ . Do đó, nếu  $\{q\alpha\} - \{p\alpha\} > 0$  thì  $\{(q-p)\alpha\} = \{q\alpha\} - \{p\alpha\}$ , còn nếu  $\{q\alpha\} - \{p\alpha\} < 0$  thì  $\{(q-p)\alpha\} = 1 - (\{q\alpha\} - \{p\alpha\})$ .

Ta xét 2 trường hợp có thể xảy ra :

**Trường hợp 1:**  $\frac{1}{N} > \{q\alpha\} - \{p\alpha\} > 0$ . Khi đó, ta đặt  $k = q - p$ , ta thu được  $0 < \{k\alpha\} < \frac{1}{N}$ .

Ta chọn  $m$  là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho  $m\{k\alpha\} > a$  (tồn tại do tính chất Archimedes của tập số thực  $\mathbb{R}$ ), điều đó có nghĩa là  $(m-1)\{k\alpha\} \leq a$ . Do đó  $m\{k\alpha\} < a + \{k\alpha\} < a + \frac{1}{N} < b$ .

Suy ra,  $m\{k\alpha\} \in (a,b) \subset [0;1)$ . Nhưng  $mk\alpha = m\lfloor k\alpha \rfloor + m\{k\alpha\} \Rightarrow \{mk\alpha\} = m\{k\alpha\}$ . Đặt  $n = mk$ , ta được điều phải chứng minh.

Trường hợp 2:  $0 > \{q\alpha\} - \{p\alpha\} > -\frac{1}{N}$ . Khi đó, ta đặt  $k = q - p$ , ta thu được  $1 - \frac{1}{N} < \{k\alpha\} < 1$ . Đặt

$$\beta = 1 - \{k\alpha\}, \text{ thì } 0 < \beta < \frac{1}{N}$$

Sử dụng lại cách lập luận tương tự trong trường hợp 1 ta tìm được số nguyên dương  $m$  sao cho  $m\beta \in (1-b, 1-a)$ . Điều đó có nghĩa là :  $1-b < m(1-\{k\alpha\}) < 1-a$

$$\Rightarrow a < m\{k\alpha\} - m + 1 < b$$

$$\Rightarrow a < \{m\{k\alpha\}\} < b$$

Sau cuối :  $mk\alpha = m\lfloor k\alpha \rfloor + m\{k\alpha\} \Rightarrow \{mk\alpha\} = \{m\{k\alpha\}\}$ . Đặt  $n = mk$ , ta được điều phải chứng minh.

## 5. Áp dụng cho dãy số :

**Bài toán 1: (Erdos-Szerkes)** Cho một dãy số thực bất kỳ  $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$  phân biệt. Chứng minh rằng ta luôn tìm được một dãy con tăng có độ dài  $m+1$ ,  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}}$  hoặc một dãy con giảm độ dài  $n+1$ ,  $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ .

**Lời giải :** Ta cho tương ứng với mỗi  $a_i$  số  $t_i$ : độ dài của dãy con tăng lớn nhất bắt đầu từ  $a_i$ . Nếu  $t_i \geq m+1$  một  $i$  nào đó, thì ta thu được điều phải chứng minh.

Giả sử  $t_i \leq m$  với mọi  $i$ . Ánh xạ  $f: a_i \mapsto t_i$  biến tập  $\{a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}\}$  thành  $\{1, 2, \dots, m\}$  do đó tồn tại một  $s \in \{1, 2, \dots, m\}$  sao cho

$f(a_i) = s$  với  $\left\lfloor \frac{mn+1}{m} \right\rfloor + 1 = n+1$  số  $a_i$ . Đặt  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$  ( $j_1 < \dots < j_{n+1}$ ) là các số đó. Ta chứng minh  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$  là một dãy giảm. Giả sử phản chứng :  $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$ , theo lập luận ở trên ta thu được một dãy tăng độ dài  $s$  bắt đầu từ  $a_{j_{k+1}}$ , kết quả là ta có một dãy tăng độ dài  $s+1$  bắt đầu từ  $a_{j_k}$ , mâu thuẫn với giả thiết  $f(a_{j_k}) = s$ . Do đó  $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ , ta có điều phải chứng minh.

## 6. Áp dụng cho lý thuyết đồ thị :

**Bài toán 1:** Cho một đồ thị hữu hạn  $G$  có  $n$  đỉnh, ta định nghĩa một số đặc trưng cơ bản của đồ thị như sau *chỉ số độc lập*  $\alpha(G)$  là số lớn các đỉnh sao cho hai đỉnh bất kì không có cạnh nối nhau ; *sắc số*  $\chi(G)$  là số màu tối thiểu cần sử dụng để tô màu các đỉnh của đồ thị  $G$  sao cho hai đỉnh có cạnh nối nhau thì được tô màu khác nhau. Chứng minh rằng ta luôn có  $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$ .

**Lời giải :** Ta thực hiện phân hoạch các đỉnh của  $G$  theo  $\chi(G)$  nhóm màu (mỗi nhóm gồm các đỉnh có cùng màu). Theo nguyên lý chuồng bồ câu, phải có một nhóm chứa không ít hơn  $\frac{n}{\chi(G)}$  đỉnh, các đỉnh này lập thành một tập độc lập (bởi vì chúng tô cùng màu). Do đó,  $\frac{n}{\chi(G)} \leq \alpha(G)$ . Ta suy ra điều phải chứng minh.

## Bài toán 2: (Ward-Szabo)

Ta thực hiện tô màu các cạnh của một đồ thị đầy đủ có  $n$  đỉnh. Ta gọi phép tô màu là đặc sắc nếu mọi tam giác chứa 1 hoặc 3 màu, nhưng không chứa 2 màu và đồ thị có nhiều hơn một màu.

Chứng minh rằng : Đồ thị đầy đủ có  $n$  đỉnh không thể tô màu đặc sắc với ít hơn  $\sqrt{n}+1$  màu.

**Lời giải :** Giả sử  $K_n$  được tô đặc sắc với  $r$  màu khác nhau. Gọi  $N(x, c)$  là số các cạnh liên thuộc với đỉnh  $x$  được tô màu  $c$ .

Cố định  $x_0$  và  $c_0$  sao cho  $N(x_0, c_0)$  lớn nhất, và đặt giá trị lớn nhất này là  $N$ . Thì  $n-1$  cạnh liên thuộc với  $x_0$  có thể được phân ra thành  $\leq r$  nhóm màu, mỗi nhóm có số phần tử tối đa  $N$  phần tử. Theo nguyên lý chuồng bồ câu, nếu  $n-1 > Nr$  thì phải có một nhóm có số phần tử lớn hơn hoặc bằng  $N+1$ , mâu thuẫn với giả thiết nên  $Nr \geq n-1$ .

Gọi  $x_1, x_2, \dots, x_N$  là tất cả các đỉnh được nối với  $x_0$  bởi  $N$  cạnh được tô màu  $c_0$ . Gọi  $G$  là đồ thị con đầy đủ của  $K_n$  trên tập đỉnh  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ . Tính đặc sắc của  $K_n$  kéo theo tính đặc sắc trên đồ thị con  $G$  nên do đó tất cả các cạnh của  $G$  đều được tô màu  $c_0$ .

Bởi vì  $K_n$  được tô ít nhất bởi hai màu nên tồn tại đỉnh  $y$  thuộc  $K_n$  không nằm trên  $G$  và sao cho có ít nhất một cạnh nối  $y$  với  $G$  có màu khác  $c_0$ .

**Bổ đề :** Tất cả  $N+1$  cạnh nối  $y$  tới  $G$  được tô màu khác nhau và khác  $c_0$ .

### Chứng minh bổ đề :

Nếu một cạnh nối  $y$  với  $G$ , ví dụ  $\{y, x_1\}$ , có màu  $c_0$  thì theo tính đặc sắc thì cạnh  $\{y, x_0\}$  phải được tô màu  $c_0$ , mâu thuẫn với cách chọn  $y$  (bởi vì  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  là tập tất cả các đỉnh nối với  $x_0$  được tô màu  $c_0$ ). Kế đến, nếu hai cạnh nào đó nối  $y$  với  $G$ , ví dụ  $\{y, x_1\}, \{y, x_2\}$  có cùng màu thì theo tính đặc sắc ta có cạnh  $\{x_1, x_2\}$  cũng

được tô cùng màu đó. Nhưng  $\{x_1, x_2\}$  thuộc  $G$  nên được tô màu  $c_0$ , mâu thuẫn với lập luận trước. Điều này kết thúc chứng minh bổ đề.

Trở lại bài toán, từ khẳng định ta thu được đánh giá :  $r \geq N+2$ . Kết hợp với đánh giá :  $N.r \geq n-1$ .

Ta thu được kết quả :  $r(r-2) \geq n-1$ . Giải bất phương trình này ta thu được  $r \geq \sqrt{n}+1$ , điều phải chứng minh.

## 7. Tài liệu tham khảo :

[1]. Trần Nam Dũng , Tài liệu bồi dưỡng đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2010,??/06/2010.

[2]. Stasys Jukna , Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.

[3]. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Third Edition.