

Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh

Trương Phước Nhân 15/07/2017

Bài toán : (Turan) Nếu đồ thị $G=(V,E)$ trên n không chứa $(k+1)$ -clique, $k \geq 2$, thì $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$.

Chứng minh thứ 1: (Tiếp cận theo phép đếm) Ta sử dụng phép qui nạp theo n . Khi $n=2$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bây giờ ta giả sử bất đẳng thức đúng cho mọi đồ thị có tối đa $n-1$ đỉnh, và $G=(V,E)$ là đồ thị trên n đỉnh và không có $(k+1)$ -clique và có số cạnh lớn nhất. Đồ thị này dĩ nhiên là phải chứa k -clique, bởi nếu không ta có thể thêm cạnh. Giả sử A là k -clique và $B=V-A$.

Vì A là k -clique, A chứa $e_A = \binom{k}{2}$ cạnh. Gọi e_B là số cạnh nối các đỉnh của B và $e_{A,B}$ là số cạnh nối giữa các đỉnh A và B .

Theo giả thiết quy nạp, ta có $e_A \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(n-k)^2}{2}$. Vì G không có $(k+1)$ -clique, nên mỗi đỉnh $x \in B$ kề với nhiều nhất $k-1$ đỉnh thuộc A , ta thu được $e_{A,B} \leq (k-1)(n-k)$.

Cộng các bất đẳng thức này lại ta thu được :

$$|E| = e_A + e_B + e_{A,B} \leq \binom{k}{2} + \binom{k}{2} \frac{(n-k)^2}{2} + (k-1)(n-k) = \binom{k}{2} \left(1 - \frac{n-k}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Chứng minh thứ 2: (Kết hợp giữa quy nạp và đếm)

Ta chứng minh một kết quả mạnh hơn so với khẳng định có trong bài toán :

Nếu G là một đồ thị k -free với n đỉnh thì G chứa không quá $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \frac{r^2 - r}{2}$, trong đó r là dư trong phép chia n cho $k-1$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Giả sử kết quả đúng với mọi đồ thị k -free có tối đa $n-1$ đỉnh.

Từ bổ đề Zarankiew thì ta tìm được một đỉnh có bậc không quá $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor$. Xét đồ thị con thu được từ $n-1$ đỉnh còn lại sẽ là k -free.

Do đó, số các cạnh tối đa là $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{(n-1)^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2}$, trong đó s là số dư trong phép chia $n-1$ cho $k-1$. Bằng tính toán trực tiếp, ta nhận thấy rằng s hoặc là bằng $r-1$ ($0 < r \leq k-1$); hoặc $k-2$ ($r=0$). Trong cả hai trường hợp này, cũng bằng việc tính toán, ta luôn chỉ ra được rằng :

$$\left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{(n-1)^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2} = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Chứng minh thứ 3: (Tiếp cận theo hướng xác suất)

Bổ đề : Gọi G là một đồ thị bất kì trên $V = \{1, \dots, n\}$. Khi đó : $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}$, trong đó d_i là bậc của đỉnh i và

$\omega(G)$ là kích thước của clique lớn nhất được chứa trong G .

Chứng minh bổ đề : Thật vậy, ta chọn một hoán vị bất kì $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ (có xác suất bằng $\frac{1}{n!}$) và xây dựng trên đó một tập C theo quy tắc: ta đặt π_i vào trong tập C khi và chỉ khi là π_i được nối với tất cả các đỉnh π_j ($j < i$). Theo cách định nghĩa này thì C là một clique.

Đặt $X = |C|$ là biến ngẫu nhiên chỉ số phần tử của tập C . Khi đó ta có phân tích sau : $X = \sum_{i=1}^n X_i$, trong đó X_i là biến ngẫu đặc trưng của i , có nghĩa là $X_i = 1$ hoặc 0 phụ thuộc vào việc $i \in C$ hay $i \notin C$. Giả sử ta có một hoán vị $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ta tiến hành xây dựng tập C theo quy tắc nêu trên thì phần tử $i \in C$ khi và chỉ khi i nằm ở vị trí thứ $d_i + 1$ và tất cả các phần tử $\pi_1, \dots, \pi_{d_i}$ đều là các lân cận của phần tử i . Ta thu được

$E(X_i) = \frac{1}{n-d_i}$, sử dụng tính tuyến tính của kì vọng ta được : $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}$. Điều này chỉ ra rằng

có một clique C với ít nhất $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}$ đỉnh.

Trở lại với vấn đề của chúng ta, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta suy ra được :

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \sqrt{x_i^{-1}} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{-1}$$

Áp dụng đánh giá trên với $x_i = n - d_i$, ta thu được : $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (n-d_i)} = \frac{n^2}{n^2 - 2|E|}$.

Do G không chứa k -clique nên $\omega(G) \leq k-1$, giải bất phương trình : $\frac{n^2}{n^2 - 2|E|} \leq k-1 \Rightarrow |E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Martin Aigner, Turan Graph Theorem, ??/10/1995

[2]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị-phần I, 09/07/2017.