

Tối ưu tập hợp-phần I

Trương Phước Nhân 17/07/2017

1. Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Cho F là một họ các tập con $A_1, A_2, \dots, A_m$ các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, sao cho $A_i \cap A_j \neq \emptyset, i \neq j$. Chứng minh rằng: $m \leq 2^{n-1}$.

Lời giải: Do điều kiện $A_i \cap A_j \neq \emptyset, i \neq j$ nên với mỗi tập con $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ thì hoặc là S hoặc là $\bar{S}$ (phần bù của tập S trong $\{1, 2, \dots, n\}$) thuộc vào họ F (có thể là cả hai tập đều không thuộc). Suy ra họ F chỉ có thể chứa tối đa là phân nửa số tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$, cụ thể là 2^{n-1} .

2. Các bài toán về họ tập giao nhau:

Bài toán 1: (Fisher-de Bruijn-Erdos) Cho F là một họ các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho hai thành viên bất kì của họ có đúng 1 phần tử chung. Chứng minh rằng họ F có tối đa là n thành viên.

Chứng minh: Giả sử họ F gồm các thành viên $A_1, A_2, \dots, A_m$. Xét ma trận liên thuộc $M = (m_{ij})$ với cấp $n \times m$ của họ, phần tử m_{ij} bằng 1 khi và chỉ khi $i \in A_j$. Ta sẽ chuyển điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ của đại số tuyến tính để dễ dàng sử dụng trong quá trình giải toán. Gọi $c_1, c_2, \dots, c_m$ là các vector cột của ma trận M .

Ta cần chứng minh $c_1, c_2, \dots, c_m$ là một họ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, để thực hiện điều này đầu tiên ta tiến hành xác định công thức của tích vô hướng theo nghĩa thông thường trên $\mathbb{R}^n$ đối với các vector $s := \sum \alpha_i c_i$, với α_i bất kì, thì bằng tính toán đơn giản ta được:

$$\langle s, s \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i c_i, \sum_j \alpha_j c_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \langle c_i, c_i \rangle + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \langle c_i, c_j \rangle$$

Theo cách ta định nghĩa ma trận liên thuộc thì $\langle c_i, c_j \rangle = 1$ với $i \neq j$ và $\langle c_i, c_i \rangle = |A_i|$. Thay các giá trị vào ta

$$\text{được: } \langle s, s \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 |A_i|^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 (|A_i|^2 - 1) + \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 (|A_i|^2 - 1) + \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right)^2 \geq 0$$

Dấu “=” chỉ xảy ra khi và chỉ khi $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Điều này kéo theo là nếu $\sum \alpha_i c_i = 0$ thì $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, hay nói cách khác $c_1, c_2, \dots, c_m$ là một họ độc lập tuyến tính.

Theo lý thuyết đại số tuyến tính $\dim \mathbb{R}^n = n$ nên $m \leq n$, điều phải chứng minh.

Bài toán 2: (Bourbaki) Cho X là một tập hữu hạn, và F là một họ hữu hạn các tập con phân biệt của X . Giả sử với hai phần tử phân biệt bất kì thuộc X , ta luôn tìm được duy nhất một thành viên thuộc họ F chứa cả hai.

Chứng minh rằng: $|F| \geq |X|$.

Lời giải: Đặt $X = [n]$ và $F = \{A_1, \dots, A_k\}$. Ta cần chứng minh: $n \leq m$. Ta định nghĩa ma trận liên thuộc A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ bằng cách đặt 1 ở hàng thứ i và cột thứ j nếu $j \in A_i$. Ta xem xét ma trận $A^T A$, đây là một ma trận hình vuông cấp n . Với $i \neq j$ thì phần tử (i, j) chính xác bằng 1. Đồng thời, các phần tử trên đường chéo chính đều lớn hơn 1, bởi vì nếu một phần tử $j \in X$ chỉ nằm trong duy nhất một tập $A_k \in F$, thì từ điều kiện kéo theo mọi phần tử $i \in X$ cũng đồng thời thuộc A_k , mâu thuẫn với điều kiện.

Ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề: Cho A là một ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$. Nếu các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng $t \geq 0$, tất cả các phần tử nằm trên đường chéo chính đều lớn hơn t thì A là ma trận không suy biến.

Chứng minh bổ đề:

Nếu $t = 0$ thì khẳng định bài toán là hiển nhiên.

Xét $t > 0$, gọi J là ma trận vuông với tất cả các phần tử đều bằng 1 và đặt $D = A - tJ$. Lưu ý rằng D là một ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các số dương.

Ta tiến hành giải phương trình toán tử $Ax = 0$. Phương trình này tương đương với $Dx = -tJx$. Gọi s là tổng của tất cả các thành phần x_i của vector x và gọi $d_1, d_2, \dots, d_n$ là các phần tử trên đường chéo chính của D .

Thì khi đó: $d_i x_i = -ts \Rightarrow x_i = -\left(\frac{t}{d_i}\right)s$. Điều này chỉ ra rằng x_i và tổng s có dấu trái ngược nhau; nếu x_i và s khác 0. Do vậy lẽ tất yếu: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Nói cách khác ma trận A không suy biến, đpcm.

Do đó từ bổ đề ta suy ra ma trận $A^T A$ không suy biến (áp dụng bài toán 1), nên $\text{rank}(A^T A) = n$. Tuy nhiên, $\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank} A \leq m$, suy ra điều phải chứng minh.

2. Các bài toán về xích và đối xích:

Bài toán 1: (Lubell-Yamamoto- Meshalkin):

Cho $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, và giả sử rằng không có bất kì tập nào là con của một tập khác, nghĩa là $A_i \not\subset A_j$ với $i \neq j$.

Đối với mỗi chỉ số i , ta đặt $a_i = |A_i|$. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_n^{a_i}} \leq 1$.

Chứng minh: Chọn một hoán vị ngẫu nhiên $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ của $[n]$. Đặt E_i là biến cố: tập A_i là đoạn đầu tiên của σ , có nghĩa là $\{x_1, \dots, x_{a_i}\} = A_i$. Bởi vì mỗi tập A_i không nằm lồng trong một tập A_j khác, nên các biến cố E_i độc lập. Nhưng ta nhận thấy $P[E_i] = \frac{1}{C_n^{a_i}}$, do đó về trái chính là $P\left[\bigcup_i E_i\right]$ và xác suất này luôn ≤ 1 .

Bài toán 2: (Sperner)

Cho F là một họ các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho không có hai tập $A, B \subset F$ mà $A \subset B$ hoặc $B \subset A$. Chứng minh rằng $|F| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Chứng minh: Chọn một hoán vị ngẫu nhiên $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ của $\{1, 2, \dots, n\}$ và gọi

$X := \left| \left\{ i : \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\} \in F \right\} \right|$. Theo điều kiện của bài toán thì $X \leq 1$, nếu ngược lại thì ta tìm được hai số $i < j$ sao cho $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j)\} \in F$, bằng cách đặt $A := \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\}$ và $B := \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$ thì $A, B \subset F$ và $A \subset B$. Do đó kì vọng của X cũng sẽ ≤ 1 , nghĩa là $E[X] \leq 1$.

Mặt khác, ta tiến hành tìm công thức cho $E[X]$. Gọi N_k là số các thành viên của F có đúng k phần tử. Tiến hành tính toán:

$$E[X] = \sum_{k=1}^n P\left[\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\} \in F\right] = \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{C_n^k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{N_k}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \geq \frac{\sum_{k=1}^n N_k}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{m}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

, trong tính toán trên ta có sử dụng đánh giá: $C_n^k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Suy ra $m \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, điều phải chứng minh.

3. Siêu đồ thị:

Bài toán 1: (Bổ đề hoa hướng dương) Cho $k, r \geq 1$. Một hoa hướng dương r -đều với k cánh hoa với phần nhụy hoa C là một siêu đồ thị với k cạnh $E_1, E_2, \dots, E_k$ kích thước mỗi cạnh bằng r thỏa mãn

$E_i \cap E_j = C$, $1 \leq i < j \leq k$ và $|C| \leq r-1$, kí hiệu là $S_k^{(r)}$. Đặt $\text{ex}(n, S_k^{(r)})$ là số lớn nhất các cạnh của một siêu đồ thị r -đều đảm bảo rằng không chứa bất kì một hoa hướng dương với k cánh hoa.

Chứng minh rằng với mọi $n \geq r(k-1)$ thì $(k-1)^r \leq \text{ex}(n, S_k^{(r)}) \leq r!(k-1)^r$.

Chứng minh :

1) Chứng minh chặn dưới : Gọi $V_0, V_1, V_2, \dots, V_r$ là các tập đỉnh phân biệt với $|V_i| = k-1, 1 \leq i \leq r$ và $|V_0| = n - r(k-1) \geq 0$. Xét siêu đồ thị H trên tập đỉnh $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_r$ trong đó ta xác định cạnh $E \subseteq V$ khi và chỉ khi $E \cap V_0 = \emptyset$ và $|E \cap V_i| = 1$ với $i = 1, \dots, r$. Thì H có :

1) n đỉnh : bởi vì $|V| = |V_0| + |V_1| + \dots + |V_r| = n - r(k-1) + \underbrace{r + \dots + r}_{k-1} = n$

2) $(k-1)^r$ cạnh : để có cạnh E thỏa mãn cách xây dựng ta chỉ cần chọn ra các phần tử $v_1, v_2, \dots, v_r$ lần lượt thuộc $V_1, V_2, \dots, V_r$ và đặt $E := \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$. Mỗi tập V_i có $k-1$ phần tử nên ta có $(k-1)^r$ cách để thực hiện

3) r -đều : bởi vì $|E| = |E \cap V_0| + \sum_{i=1}^r |E \cap V_i| = 0 + \underbrace{1 + \dots + 1}_r = r$

Ta chứng minh siêu đồ thị H không chứa hoa hướng dương với k cạnh.

Thật vậy, xét một tập $S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ gồm k cạnh phân biệt thuộc H . Không giảm tính tổng quát ta giả sử hai cạnh E_1, E_2 khác nhau trên V_1 , nói một cách nôm na là không chứa bất kì đỉnh nào thuộc tập V_1 , có nghĩa là $(E_1 \cap V_1) \cap (E_2 \cap V_1) = \emptyset$. Trong khi $|V_1| = k-1$, do đó theo nguyên lý chuồng bồ câu ta tìm được một đỉnh $v \in V_1$ được chứa trong ít nhất hai cạnh khác nhau của tập S . Điều đó có nghĩa là nếu S có dạng một hoa hướng dương thì đỉnh v phải nằm ở phần nhụy, mâu thuẫn vì nhụy của ta là tập V_0 . Từ đó suy ra siêu đồ thị H không chứa bất kì một hoa hướng dương với k cạnh nào, điều phải chứng minh.

Do đó, theo định nghĩa, $ex(n, S_k^{(r)}) \geq (k-1)^r$.

2) Chứng minh chặn trên:

Xét một siêu đồ thị H r -đều trên n và có tối thiểu $r!(k-1)^r$ cạnh phân biệt. Ta sẽ chỉ ra một hoa hướng dương với k -cạnh nằm trong H bằng qui nạp theo r . Lưu ý rằng : k cạnh phân biệt lập thành một hoa hướng dương với k cánh hoa và phần nhụy rỗng. Với $r=1$ thì mỗi cạnh của H chỉ chứa một đỉnh, khẳng định là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với mọi giá trị $< r$ ($r \geq 2$). Nếu H chứa k cạnh phân biệt thì khẳng định là đúng theo lưu ý. Do đó ta giả sử H không chứa k cạnh phân biệt. Gọi $S = \{E_1, E_2, \dots, E_t\}$ là tập các cạnh phân biệt với kích thước lớn nhất của H và đặt $U = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t$. Thì $|U| \leq tr \leq (k-1)r$ và mỗi cạnh thuộc H đều có giao với U (nếu ngược lại ta bổ sung thêm cạnh không có giao với U và thu được một tập có kích thước lớn hơn, mâu thuẫn với tính lớn nhất).

Theo nguyên lý chuồng bồ câu ta tìm được một đỉnh v được chứa trong ít nhất là

$$\frac{|E(H)|}{|U|} \geq \frac{r!(k-1)^r + 1}{(k-1)r} = (r-1)!(k-1)^{r-1} + \frac{1}{(k-1)r} > (r-1)!(k-1)^{r-1} \text{ cạnh thuộc } H. (*)$$

Xét siêu đồ thị H' $(r-1)$ -đều với tập cạnh $E(H') = \{E \setminus \{v\} \mid E \in E(H), v \in E\}$. Theo (*), siêu đồ thị H' chứa nhiều hơn $(r-1)!(k-1)^{r-1}$ cạnh và theo giả thiết qui nạp thì nó phải chứa k cạnh phân biệt

$E'_1, E'_2, \dots, E'_k$ có dạng hoa hướng dương với k cánh hoa và nhụy C' . Theo cách ta xây dựng thì $E'_i \cup \{v\}$

là một cạnh trong siêu đồ thị H với mọi $1 \leq i \leq k$. Do đó các cạnh $E'_1 \cup \{v\}, E'_2 \cup \{v\}, \dots, E'_k \cup \{v\}$ lập thành một hoa hướng dương với nhụy $C = C' \cup \{v\}$ trong H .

4. Tài liệu tham khảo:

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Po- Shen Loh, Algebraic Methods in Combinatoric, ???/2009
- [3]. Po- Shen Loh, Combinatorics of sets, ???/2011
- [4]. Po- Shen Loh, Probabilistic Methods in Combinatorics, ???/2009