

Mô hình designs- Tập difference

Trương Phước Nhân, 22/072017

Từ bài viết “Các bài toán về tập hợp” ta nhận ra rằng mặt phẳng xạ ảnh là một cấu trúc designs. Bài viết này được thực hiện nhằm cung cấp thêm một số dạng thể hiện khác của cấu trúc designs.

Mô hình : Tập difference

Cho $\mathbb{Z}_v$ là nhóm cộng Abel các số nguyên theo modulo v . Để đơn giản hóa vấn đề ta có thể hình dung $\mathbb{Z}_v$ là tập hợp gồm các số nguyên $\{0, 1, 2, \dots, v-1\}$ trong đó phép cộng được lấy theo modulo v .

Cho $2 \leq k < v$ và $\lambda \geq 1$. Một (v, k, λ) -difference tập là một k -tập con $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\} \subseteq \mathbb{Z}_v$ thỏa mãn : một phần tử bất kì thuộc tập $\mathbb{Z}_v \setminus \{0\}$ xuất hiện trong các hiệu $d_i - d_j$ ($i \neq j$) chính xác λ lần.

Kết quả 1: Chứng minh rằng : $\lambda(v-1) = k(k-1)$

Chứng minh : Ta chứng minh kết quả này bằng cách sử dụng nguyên lý đếm bằng hai cách : Ta thực hiện đếm số các hiệu $d_i - d_j$ ($i \neq j$) (các hiệu này không bắt buộc phải phân biệt)

Cách 1: Ta biết rằng có $k(k-1)$ cặp số (i, j) với $i \neq j$ nên cũng sẽ có $k(k-1)$ hiệu $d_i - d_j$ ($i \neq j$)

Cách 2: Theo cách ta định nghĩa của tập difference thì mỗi một trong số $v-1$ phần tử khác không có mặt chính xác λ lần trong các hiệu $d_i - d_j$ ($i \neq j$).

Điều đó suy ra :

$$\lambda(v-1) = k(k-1)$$

Nếu D là một tập difference thì ta gọi tập tịnh tiến của D là tập $a + D := \{a + d_1, a + d_2, \dots, a + d_k\}$.

Lưu ý rằng từ giả thiết $k < v$ kết hợp với hệ thức $\lambda(v-1) = k(k-1)$ ta dễ dàng suy ra được :

Kết quả 2: Tất cả các tập tịnh tiến của một tập difference đều phân biệt.

Chứng minh: Thật vậy, nếu $a + D = D$ với một phần tử $a \neq 0$ thì tồn tại một hoán vị π của tập $\{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $\pi(i) \neq i$ và $a + d_{\pi(i)} = d_i$ với mọi chỉ số i . Do đó ta có thể biểu diễn phần tử a dưới dạng hiệu $d_{\pi(i)} - d_i$ bằng k cách; nhưng xin lưu ý rằng từ việc $\lambda(v-1) = k(k-1)$ và $k < v$ kéo theo $\lambda < k$, mâu thuẫn. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Tiếp theo ta trình bày một kết quả về sự tồn tại của (v, k, λ) -difference tập, ta dùng từ thặng dư bình phương để biểu thị cho các phần tử có dạng a^2 với $a \in \mathbb{Z}_v$

Kết quả 3: Nếu v là lũy thừa của một số nguyên tố và $v \equiv 3 \pmod{4}$ thì các thặng dư bình phương khác 0 có dạng một (v, k, λ) -difference tập với $k = \frac{v-1}{2}$ và $\lambda = \frac{v-3}{4}$.

Nhận xét rằng : điều kiện $v \equiv 3 \pmod{4}$ chỉ đóng vai trò cầu nối nhằm chỉ ra rằng -1 không phải là một thặng dư bình phương của $\mathbb{Z}_v$, có nghĩa là $-1 \neq a^2 \pmod{v}$ với a là một phần tử bất kì thuộc $\mathbb{Z}_v$. Vấn đề chứng minh khẳng định này hoàn toàn thuộc về lý thuyết nhóm sơ cấp ta sẽ không đề cập đến trong bài viết này.

Chứng minh: Gọi D là tập các thặng dư bình phương khác 0, và $k := |D|$. Ta có các khẳng định sau :

Bổ đề : $k = \frac{v-1}{2}$

Chứng minh bổ đề : Thật vậy, các thặng dư bình phương khác 0 của $\mathbb{Z}_v$ đều có dạng a^2 với $a \in \mathbb{Z}_v \setminus \{0\}$.

Nhưng với mỗi phần tử a như vậy thì phương trình $x^2 = a^2$ có hai nghiệm $x = a$ (lưu ý vì v là lũy thừa của một số nguyên tố nên $\mathbb{Z}_v$ là một trường).

Do đó, cặp $(a, -a)$ chỉ tương ứng với một thặng dư bình phương nên số các thặng dư bình phương bằng một nửa số các phần tử khác không của $\mathbb{Z}_v$ hay $k = \frac{v-1}{2}$ đpcm.

Theo nhận xét trên của ta thì -1 không phải là một thặng dư bình phương của $\mathbb{Z}_v$. Do đó, bởi vì D là tập các thặng dư bình phương khác 0 của $\mathbb{Z}_v$ nên tập $-D := \{-d; d \in D\}$ chính là tập các phần tử không phải là thặng dư bình phương.

Với mọi $d \in D$ bất kì, cặp $(x, y) \in D \times D$ thỏa mãn phương trình $x - y = 1$ khi và chỉ khi cặp

$(dx, dy) \in D \times D$ thỏa mãn phương trình $dx - dy = d$ hoặc một cách tương đương :khi và và chỉ khi cặp

$(dx, dy) \in D \times D$ thỏa mãn phương trình $dy - dx = -d$. Điều này chỉ ra rằng tất cả các thặng dư bình phương khác 0, $d \in D$, và tất cả các phần tử không phải là thặng dư bình phương, $-d \in -D$, có cùng số λ cách biểu diễn thành hiệu của hai thặng dư bình phương khác 0.

Số λ này được tính dựa trên bổ đề và kết quả 1, $\lambda = \frac{k(k-1)}{v-1} = \frac{v-3}{4}$.

Sau cùng ta xét đến vấn đề về thể hiện của mô hình design dựa trên tập difference vừa nêu trên.

Kết quả : Nếu $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ là một (v, k, λ) -difference tập thì các tập tịnh tiến $D, 1+D, \dots, (v-1)+D$ đóng vai trò là các khối của một (v, k, λ) -design trên tập $\mathbb{Z}_v$.

Chứng minh: Ta có v khối trên v phần tử và mỗi tập tịnh tiến chứa chính xác k phần tử. Do vậy vấn đề còn lại nằm ở việc chỉ ra mỗi cặp điểm phân biệt được chứa trong chính xác λ khối. (xem lại bài viết “Design”)

Thật vậy, ta xét $x, y \in \mathbb{Z}_v, x \neq y$. Giả sử rằng $x, y \in a + D$ với $a \in \mathbb{Z}_v$ thì $x = a + d_i$ và $y = a + d_j$ với $i \neq j$.

Đồng thời ta suy ra : $d_i - d_j = x - y = d$. Theo định nghĩa của ta về tập difference thì có chính xác là λ cặp $i \neq j$ sao cho $d_i - d_j = d$, và với mỗi một cặp như vậy, ta luôn tìm được duy nhất một phần tử a sao cho $x, y \in a + D$, ta chọn $a := x - d_i = y - d_j$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Design, 22/07/2