

Định lý Frankl-Wilson

Trương Phước Nhân, 29/07/2017

Cho F là một họ các tập con của n -tập, và $L \subset \{0, 1, 2, \dots\}$ là một tập hữu hạn. Họ F gọi là L -giao nếu với mọi cặp thành viên khác nhau A, B của họ ta luôn có $|A \cap B| \in L$.

Bài toán 1: (Frank – Wilson) Nếu họ F là L -giao của một n -tập thì $|F| \leq \sum_{i=0}^{|L|} \binom{n}{i}$

Chứng minh: Giả sử $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ trong đó $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_m|$. Đặt $L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ là tập các kích thước có thể có của phần giao của các thành viên khác nhau của họ F . Điều này có nghĩa là với $i \neq j$ ta luôn tìm được chỉ số k sao cho $|A_i \cap A_j| = l_k$. Với mỗi thành viên A_i của họ F ta cho tương ứng với vector đặc trưng $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, trong đó $v_{ij} = 1$ nếu $j \in A_i$ và $v_{ij} = 0$ nếu ngược lại. Hiển nhiên $\langle v_i, v_j \rangle = |A_i \cap A_j|$,

trong đó $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ là tích vô hướng thông thường trên $\mathbb{R}^n$ (xem thêm bài viết “Các bài toán về tập hợp”, “Tối ưu tập hợp – phần 1”)

Với mỗi chỉ số $i = \overline{1, m}$ ta xây dựng đa thức f_i theo n biến bởi $f_i(x) = \prod_{k: l_k < |A_i|} (\langle v_i, x \rangle - l_k)$ với

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Gọi F là không gian vector nhỏ nhất chứa các đa thức $f_i, i = \overline{1, m}$.

Hiển nhiên $f_i(v_j) = 0$ với $1 \leq j < i \leq m$, và $f_i(v_i) \neq 0$ với $1 \leq i \leq m$.

Nhận xét: $f_1, f_2, \dots, f_m$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (*)

Thật vậy, giả sử tồn tại các vô hướng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Chọn chỉ số i lớn nhất sao cho $\alpha_i \neq 0$ nên $\alpha_j = 0$ với $j > i$. Thay $x = v_i$ vào hệ thức ta được:

$$\alpha_1 f_1(v_i) + \alpha_2 f_2(v_i) + \dots + \alpha_{i-1} f_{i-1}(v_i) + \alpha_i f_i(v_i) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i f_i(v_i) = 0 \quad (f_i(v_j) = 0 \text{ với } 1 \leq j < i \leq m)$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (f_i(v_i) \neq 0)$$

Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $f_1, f_2, \dots, f_m$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$, đpcm.

Dễ dàng nhận thấy các đa thức $f_1, f_2, \dots, f_m$ có bậc tối đa bằng s . Do các thành phần của mỗi vector đặc trưng là 0 hoặc 1 nên tập các đơn thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng s lập thành một cơ sở của không gian vector F (trong các đơn thức hoặc các đa thức mỗi biến x_i xuất hiện không quá 1 lần). Bằng tính toán đơn

giản ta thu được số chiều của không gian này là $\sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra: $m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$, hay $|F| \leq \sum_{i=0}^{|L|} \binom{n}{i}$, đpcm.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Mihalis Kolountzakis, Application of linear algebra in combinatorics, ??/03/2010
- [3]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017
- [4]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp – phần 1, 17/07/2017