

Các bài toán dạng Frankl - Wilson

Trương Phước Nhân, 05/08/2017

Bài toán 1: (Deza – Frankl – Singhi) Cho L là một tập các số nguyên theo modulo p , trong đó p nguyên tố. Giả sử $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ là một họ các tập con của một tập với n phần tử thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) $|A_i| \notin L \pmod p$ với mọi $1 \leq i \leq m$

2) $|A_i \cap A_j| \in L \pmod p$ với mọi $1 \leq i < j \leq m$

Chứng minh rằng: $|F| \leq \sum_{i=1}^{|L|} \binom{n}{i}$

Chứng minh: Giả sử $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ trong đó $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_m|$. Đặt $L = \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$. Với mỗi thành viên A_i của họ F ta cho tương ứng với vector đặc trưng $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, trong đó $v_{ij} = 1$ nếu $j \in A_i$ và $v_{ij} = 0$ nếu ngược lại. Hiển nhiên $\langle v_i, v_j \rangle = |A_i \cap A_j|$ (xem thêm bài viết “**Định lý Frankl – Wilson**”).

Với mỗi chỉ số $i = \overline{1, m}$ ta xây dựng đa thức f_i theo n biến bởi $f_i(x) = \prod_l (\langle v_i, x \rangle - l)$ với

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$. Gọi F là không gian vector nhỏ nhất chứa các đa thức $f_i, i = \overline{1, m}$.

Hiển nhiên $f_i(v_j) \equiv 0 \pmod p$ với $1 \leq j < i \leq m$, và $f_i(v_i) \not\equiv 0 \pmod p$ với $1 \leq i \leq m$.

Nhận xét: $f_1, f_2, \dots, f_m$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Z}_p$ (*)

Thật vậy, giả sử tồn tại các $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}_p$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{Z}_p^n$. Chọn chỉ số i lớn nhất sao cho $\alpha_i \neq 0$ nên $\alpha_j = 0$ với $j > i$. Thay $x = v_i$ vào hệ thức ta được:

$$\alpha_1 f_1(v_i) + \alpha_2 f_2(v_i) + \dots + \alpha_{i-1} f_{i-1}(v_i) + \alpha_i f_i(v_i) = 0 \pmod p$$

$$\Rightarrow \alpha_i f_i(v_i) = 0 \pmod p \quad (f_i(v_j) = 0 \text{ với } 1 \leq j < i \leq m)$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \pmod p \quad (f_i(v_i) \neq 0)$$

Điều mâu thuẫn này chỉ ra rằng $f_1, f_2, \dots, f_m$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Z}_p$, đpcm.

Dễ dàng nhận thấy các đa thức $f_1, f_2, \dots, f_m$ có bậc tối đa bằng s . Do các thành phần của mỗi vector đặc trưng là 0 hoặc 1 nên tập các đơn thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng s lập thành một cơ sở của không gian vector F (trong các đơn thức hoặc các đa thức mỗi biến x_i xuất hiện không quá 1 lần). Bằng tính toán đơn

giản ta thu được số chiều của không gian này là $\sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra: $m \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$, hay $|F| \leq \sum_{i=0}^{|L|} \binom{n}{i}$, đpcm.

Bài toán 2: (Ray – Chaudhuri – Wilson) Cho F là một họ các tập con của $\binom{[n]}{k}$, có nghĩa là một họ các tập con của $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho kích thước của mỗi thành viên luôn bằng k . Cho p là một số nguyên tố và gọi $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ là tập các số nguyên modulo p sao cho không có số nào đồng dư với k . Giả sử với mọi cặp $A, B \in F$ sao cho $A \neq B$ thì $|A \cap B|$ đồng dư với một $\lambda \in \Lambda$. Chứng minh rằng $|F| \leq \binom{n}{s}$.

Chứng minh thứ 1: (Xem lại bài viết “**Định lý Frankl – Wilson**”)

Giả sử $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ trong đó $|A_1| \leq |A_2| \leq \dots \leq |A_m|$. Với mỗi thành viên A_i của họ F ta cho tương ứng với vector đặc trưng χ_{A_i} . Hiển nhiên $\langle \chi_{A_i}, \chi_{A_j} \rangle = |A_i \cap A_j|$

Với mỗi chỉ số $i = \overline{1, m}$ ta xây dựng đa thức f_i theo n biến bởi $f_i(x) = \prod_{j=1}^s (\langle \chi_{A_j}, x \rangle - \lambda_j)$ với

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nhận xét : Bậc của các đa thức $f_1, f_2, \dots, f_m$ tối đa là bằng s , $f_j(A_i) = 0$ (ở đây $f_i(A_j)$ hiểu theo nghĩa $f_i(\chi_{A_j})$), trong đó χ_{A_j} là vector đặc trưng của tập A_j và $f_i(A_i) \neq 0$.

Ta cho tương ứng mỗi tập con $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ với $|I| \leq s-1$ đa thức $g_I(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i - k \right) \prod_{i \in I} x_i$, bậc của mỗi đa thức g_I tối đa bằng s và hiển nhiên với mọi tập con $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ thì $g_I(S) \neq 0$ nếu và chỉ nếu $|S| \neq k$ và $S \supseteq I$.

Khẳng định : Các đa thức g_I cùng với các đa thức f_i là độc lập tuyến tính.

Chứng minh khẳng định : Giả sử $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i + \sum_{|I| \leq s-1} \mu_I g_I = 0$, trong đó $\lambda_i, \mu_I \in \mathbb{R}$. Thay A_i (hiểu theo nghĩa là ta thay $x = \chi_{A_i}$) vào hệ thức này ta thu được $\lambda_i = 1$ với mọi $i = \overline{1, m}$. Ta thu được hệ thức mới $\sum_{|I| \leq s-1} \mu_I g_I = 0$.

Giả sử các đa thức g_I không độc lập tuyến tính, có nghĩa là tồn tại các tập I sao cho $\mu_I \neq 0$.

Khai triển hệ thức này dưới dạng $\mu_{I_1} g_{I_1} + \dots + \mu_{I_t} g_{I_t} = 0$ sao cho $|I_1| \geq |I_j|$ với mọi chỉ số $j > 1$ và $\mu_{I_1} \neq 0$ với mọi chỉ số i . Thay I_1 vào hệ thức này ta được $\mu_{I_1} = 0$, mâu thuẫn. Kết thúc phép chứng minh khẳng định. Theo khẳng định trên ta nhận thấy bản thân các đa thức g_I độc lập tuyến tính và nằm trong không gian vector các đa thức có bậc $\leq s-1$ và có $\sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}$ đa thức như g_I nên các đa thức g_I lập thành một cơ sở của không gian vector này.

Gọi V là không gian vector nhỏ nhất sinh ra bởi các đa thức f_i , V_1 là không gian vector sinh ra bởi các đa thức g_I thì ta nhận thấy $\dim V = m, \dim V_1 = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i}$. Theo lập luận trên ta nhận thấy $\dim V + \dim V_1 \leq \sum_{i=0}^s \binom{n}{i}$ (xem lại bài viết “**Định lý Frankl – Wilson**”). Nói cách khác $|F| \leq \binom{n}{s}$.

Chứng minh thứ 2: Không mất tính tổng quát ta giả sử $s < k$ (nếu $k = s : |F| \leq \binom{n}{k} = \binom{n}{s}$, bài toán được chứng minh đối với trường hợp $k < s$ lập luận tương tự). Với mỗi $i < j$ ta xét $N(i, j)$ ma trận là ma trận có cấp $\binom{n}{i} \times \binom{n}{j}$ xác định trên cặp $(A, B) \in \binom{[n]}{i} \times \binom{[n]}{j}$ bởi $N(i, j)(A, B) = \begin{cases} 1, A \subset B \\ 0, A \not\subset B \end{cases}$. Gọi V là không gian vector trên $\mathbb{R}$ sinh bởi các vector hàng của ma trận $N(s, k)$. Do có $\binom{n}{s}$ hàng nên $\dim V \leq \binom{n}{s}$.

Với $i \leq s$ ta xét tích hai ma trận $N(i, s)N(s, k)$ có cấp $\binom{n}{i} \times \binom{n}{k}$ xác định trên cặp $(A, B) \in \binom{[n]}{i} \times \binom{[n]}{k}$. Theo định nghĩa phép nhân ma trận ta được :

$$N(i, s)N(s, k)(A, B) = \sum_{C \in \binom{[n]}{s}} 1_{A \subset C} 1_{C \subset B} = \text{số các tập con } C \text{ sao cho } A \subset C \subset B = \begin{cases} \binom{k-i}{s-i}, & A \subset B \\ 0, & A \not\subset B \end{cases}$$

(trong đó ta kí hiệu $1_{A \subset B} := 1$ nếu $A \subset B$ và 0 trong những trường hợp còn lại)

$$\Rightarrow N(i, s)N(s, k)(A, B) = \binom{k-i}{s-i} N(i, k)(A, B)$$

Do đó các vector hàng của $N(i, k)$ nằm trong không gian vector V .

Bây giờ ta xét ma trận tích $M(i, k) := N(i, k)^T N(i, k)$. Với $(A, B) \in \binom{[n]}{k} \times \binom{[n]}{k}$ thì

$$M(i, k)(A, B) = \sum_{C \subset \binom{[n]}{i}} 1_{C \subset A} 1_{C \subset B} = \text{số các tập con } C \text{ sao cho } C \subset A \text{ và } C \subset B = \binom{|A \cap B|}{i}$$

Chọn $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$ sao cho $\prod_{\lambda \in \Lambda} (x - \lambda) = \sum_{i=1}^s a_i \binom{x}{i}$

Đặt $M = \sum_{i=1}^s a_i M(i, k)$. Khi đó các vector hàng của $M(i, k)$ và do đó các vector hàng của M cũng nằm trong không gian vector V . Mặt khác, $M(A, B) \equiv 0 \pmod{p}$ nếu $A, B \in F$ và $A \neq B$ (bởi vì theo giả thiết

$|A \cap B| \equiv \lambda$ với một số $\lambda \in \Lambda$ nên $\sum_{i=1}^s a_i \binom{|A \cap B|}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ theo cách ta chọn các số $a_1, a_2, \dots, a_s$) trong

trường hợp $A, B \in F$ và $A = B$ ta có $M(A, B) \not\equiv 0 \pmod{p}$ (bởi vì không có số $\lambda \in \Lambda$ nào đồng dư với k).

Xét ma trận con N của M có các hàng và các cột được đánh số bởi các tập $A \in F$. Nhận thấy rằng ma trận con N là một ma trận vuông có cấp $|F|$, và $|F|$ hàng của ma trận N độc lập tuyến tính trên $\mathbb{Z}_p$ (lưu ý các phần tử trên đường chéo chính của $N \not\equiv 0 \pmod{p}$) và do đó cũng độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Suy ra $\text{rank}_{\mathbb{R}}(N) = |F|$.

Hiển nhiên $\text{rank}_{\mathbb{R}}(N) \leq \text{rank}_{\mathbb{R}} M \leq \dim V \Rightarrow |F| \leq \binom{n}{s}$.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Timothy Gowers, Topic in Combinatorics
- [3]. Mihalis Kolountzakis, Application of linear algebra in combinatorics, ??/03/2010
- [4]. Trương Phước Nhân, 06/08/2017