Định lý Erdos – Stone

Trương Phước Nhân, 06/08/2017

Cho đồ thị G có n đỉnh sao cho không chứa một đồ thị con H cho trước. Đặt $ex(n,H)$ là số cạnh tối đa có thể có của đồ thị G. Trong các bài viết **“ Tối ưu đồ thi - phần 1”** và **“ Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh”** ta đã chỉ ra rằng $ex(n,C_3)=\frac{n^2}{4}$, $ex(n,K_{t+1})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)n^2$ (đẳng thức ở đây hiểu theo nghĩa không chặt , giá trị thật có thể sai khác một lượng đủ bé so với giá trị bên vế phải)

Bài toán: (Erdos – Stone)
Với mọi đồ thị H cố định và số dương $\varepsilon>0$ cho trước, ta luôn tìm được số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $n\ge n_0$ thì $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}-\varepsilon\right)n^2\le ex(n,H)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\varepsilon\right)n^2$, trong đó $\chi(H)$ là sắc số của đồ thị H (xem lại bài viết **“ Nguyên lý chuồng bồ câu”)**

Chứng minh : Ta cần đến các kết quả phụ sau trong chứng minh :

Bổ đề 1: Với $k\ge1$ và $0<\varepsilon<\frac{1}{k}$ cho trước , tồn tại số nguyên dương $n_0(k,\varepsilon)$ sao cho với mọi đồ thị G với $n\ge n_0(k,\varepsilon)$ đỉnh và $m\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}+\varepsilon\right)n^2$ cạnh ta luôn tìm được một đồ thị con G' sao cho bậc của tất cả các đỉnh $\ge\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)|V(G')|$.

Chứng minh bổ đề 1:
Thật vậy cách tìm tập con G' đơn giản như sau: Ta xóa đi khỏi đồ thị G một đỉnh v có bậc nhỏ hơn $\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)|V(G)|$, kí hiệu đồ thị thu được là G_1, ta tiếp tục xóa đi một đỉnh v_1 có bậc nhỏ hơn $\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)|V(G_1)|$, … Sau một số hữu hạn bước thì thuật toán của ta phải dừng lại , giả sử khi thao tác trên dừng lại đồ thị thu được có n_0 đỉnh . Ta sẽ chỉ ra rằng bằng cách chọn n đủ lớn thì n_0 sẽ khác 0 bằng phương pháp đếm bằng hai cách : đếm tổng số các cạnh của đồ thị

Đầu tiên ta đếm tổng số các cạnh mà ta đã xóa khỏi đồ thị . Giả sử tại một thời điểm, đồ thị G có l đỉnh nên khi thực hiện thuật toán trên ta đã xóa đi tối đa $\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)l$ cạnh . Do đó , tổng số các cạnh đã bị xóa khỏi đồ thị tối đa là

$$\sum_{l=n_0+1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)l=\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-n_0)\frac{n+n_0+1}{2}\le\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2-n_0^2}{2}+\frac{n-n_0}{2}\quad\left(0<\varepsilon<\frac{1}{k}\right).$$

Khi thao tác dừng lại ta dễ dàng nhận ra là đồ thị có số cạnh tối đa là $\frac{1}{2}n_0^2$ (áp dụng định lý Turan với lưu ý đồ thị là $k-free$, vì nếu ngược lại thì theo nguyên lý trung bình ta sẽ tìm một đỉnh có bậc bé hơn $\left(1-\frac{1}{k}\right)n_0$, điều này mâu thuẫn với thuật toán). Do đó , số cạnh có trong đồ thị lúc ban đầu là :

$$|E(G)|\le\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2-n_0^2}{2}+\frac{n-n_0}{2}+\frac{1}{2}n_0^2=\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n^2}{2}+\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n_0^2}{2}+\frac{n-n_0}{2}$$

Mặt khác theo giả thiết ta có $|E(G)|\ge\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}+\varepsilon\right)n^2$.

Kết hợp hai đánh giá trên ta được: $\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{n_0^2}{2}-\frac{n_0}{2}\geq\frac{\varepsilon n^2}{4}-\frac{n}{2}$. Do đó nếu ta muốn n_0 khác không thì ta chỉ cần chọn n đủ lớn. Từ lập luận trên ta nhận ra rằng với n đủ lớn thì thuật toán trên sẽ cho ta đồ thị G' sao cho bậc của tất cả các đỉnh $\geq\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left|V\left(G'\right)\right|$.

<u>Bổ đề 2:</u> Với $k\geq 1,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{k}$ và $t\geq 1$ cho trước , ta luôn tìm được số nguyên dương $n_0\left(k,\varepsilon,t\right)$ sao cho với mọi đồ thị G với $n\geq n_0\left(k,\varepsilon,t\right)$ đỉnh và $m\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}+\varepsilon\right)n^2$ cạnh sẽ chứa k tập đỉnh phân biệt $A_1,A_2,...,A_k$ có kích thước t sao cho hai đỉnh bất kì nằm trong hai tập A_i,A_j khác nhau có cạnh nối với nhau.

<u>Chứng minh bổ đề :</u> Sử dụng bổ đề 1 , khi n đủ lớn không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng bậc của tất cả các đỉnh $\geq\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\varepsilon}{2}\right)n$ (nếu cần thiết ta có thể thay G bởi đồ thị con G' nêu trong bổ đề 1). Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp qui nạp theo số k . Với $k=1$, thì kết luận của bài toán là hiển nhiên . Ta giả sử khẳng định bài toán đúng với mọi giá trị nhỏ hơn k .

Xét $k\geq 1,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{k}$ và $t\geq 1$, ta cần chứng minh khẳng định đúng với giá trị $k+1$. Đặt $s:=\left\lceil\frac{t}{\varepsilon}\right\rceil$. Áp dụng giả thiết quy nạp , với n đủ lớn ta tìm được k tập đỉnh phân biệt $A_1,A_2,...,A_k$ mỗi tập đều có kích thước s sao cho hai đỉnh nằm trong hai tập bất kì thì có cạnh nối với nhau. Gọi $U=V\left(G\right)\setminus\left(A_1\cup A_2\cup...\cup A_k\right)$ và W là tập các đỉnh nằm trong U liên hợp với ít nhất t đỉnh trong mọi tập A_i.

Ta chứng minh rằng với n đủ lớn thì $\left|W\right|>\binom{s}{t}^k\left(t-1\right)$.

Thật vậy, ta đếm số các cặp đỉnh không có cạnh nối giữa U và $A_1\cup A_2\cup...\cup A_k$, ta tạm gọi số này là $\overline{m}$. Theo định nghĩa của tập W thì các đỉnh nằm trong $U\setminus W$ có số lân cận nằm trong một tập A_i nào đó là bé hơn t, theo cách đánh giá thì :

$$\overline{m}\geq\left|U\setminus W\right|\left(s-t\right)\geq\left(n-ks-\left|W\right|\right)\left(1-\varepsilon\right)s$$

Mặt khác, một đỉnh bất kì trong đồ thị thì sẽ có tối đa là $\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)n$ đỉnh không phải là lân cận, do đó :

$$\overline{m}\leq ks\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)n=\left(1-\frac{k\varepsilon}{2}\right)sn$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta suy ra $\left|W\right|\left(1-\varepsilon\right)s\geq\left(n-ks\right)\left(1-\varepsilon\right)s-\left(1-\frac{k\varepsilon}{2}\right)sn=\varepsilon\left(\frac{k}{2}-1\right)sn-\left(1-\varepsilon\right)ks^2$

Do đó bằng cách chọn n đủ lớn thì ta có $\left|W\right|>\binom{s}{t}^k\left(t-1\right)$.

Mỗi đỉnh $w\in W$ có tối thiểu là t lân cận nằm trong mỗi tập A_i. Ta lấy ra t đỉnh này từ mỗi tập A_i và đặt T_w là hợp của kt điểm này. Có tất cả $\binom{s}{t}^k$ khả năng khác nhau để tạo ra tập T_w. Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu ta suy ra rằng có ít nhất t đỉnh $w\in W$ cho tương ứng cùng một tập T_w. Ta đặt A_{k+1} là tập hợp gồm t đỉnh vừa nêu và A_i' gồm t đỉnh tương ứng trong tập A_i với $i=1,2,...,\ k$. Khi đó các tập $A_1',A_2',...,A_k',A_{k+1}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Kết thúc chứng minh bổ đề 2.

Trở lại vấn đề ban đầu :

Giả sử $\chi\left(H\right)=k+1$. Sử dụng kết quả : Đồ thị Turan $T_{n,k}$ có sắc số bằng k (đồ thị Turan $T_{n,k}$ là đồ thị k phần với n đỉnh sao cho số đỉnh giữa các phần chênh lệch nhau không quá 1 đơn vị) . Do đó đồ thị $T_{n,k}$

không thể chứa đồ thị H nên $ex(n,H) \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)n^2 \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}-\varepsilon\right)n^2$ (lưu ý rằng đồ thị Turan $T_{n,k}$ là nghiệm tối ưu cho định lý Turan , xem thêm bài viết **"Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh"**)

Để chứng minh đánh giá còn lại ta đặt $t := |V(H)|$. Xét đồ thị G với n đỉnh và $m \geq \left(1-\frac{1}{k}+\varepsilon\right)\frac{n^2}{2}$ cạnh

Áp dụng bổ đề 2 , với n đủ lớn , đồ thị G sẽ chứa các tập $A_1, A_2, ..., A_k$ có kích thước t sao cho hai đỉnh bất kì nằm trong hai tập A_i, A_j khác nhau có cạnh nối với nhau. Do đồ thị H có sắc số bằng $k+1$ và do đó ta có thể nhúng nó vào $A_1, A_2, ..., A_k$ dựa trên màu sắc của các đỉnh, hay nói cách khác H là đồ thị con của G .

Theo định nghĩa của $ex(n,H)$ ta suy ra : $ex(n,H) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\varepsilon\right)n^2$ với mọi $\varepsilon > 0$ và n đủ lớn.

Kết thúc chứng minh của định lý.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng của Jacob Fox – Math 307 : Combinatorics
[2]. Trương Phước Nhân, Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh, 15/07/2017
[3]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị - phần 1, 09/07/2017