Phương pháp trị riêng cho đánh giá chặn trên của chỉ số độc lập

Trương Phước Nhân, 09/08/2017

Kết quả 1: Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ với các giá trị riêng $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ thì

$$\lambda_k = \max_{\dim(U)=k} \min_{0 \neq x \in U} \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_{\dim(U)=k-1} \max_{0 \neq x \perp U} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Chứng minh : Ta chứng minh đẳng thức thứ nhất :

Đầu tiên ta nhận thấy rằng tỉ số $\frac{x^T A x}{x^T x}$ không thay đổi nếu ta thay x bởi μx, trong đó $\mu \neq 0$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử x là một vector đơn vị, có nghĩa là $x^T x = 1$.

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là hệ cơ sở trực chuẩn tường ứng với các vector $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (một hệ như vậy luôn tồn tại theo quá trình trực chuẩn Hilbert – Schmidt). Với mọi vector $x \in \mathbb{R}^n$ ta luôn có thể biểu diễn dưới dạng $x = \sum \alpha_i x_i$ và tiến hành khai triển $x^T A x$ như sau :

$$x^T A x = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j x_i \lambda_j x_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$ (lưu ý : $x_1, x_2, ..., x_n$ là hệ cơ sở trực chuẩn)

Bằng cách tính toán tương tự ta cũng thu được : $x^T x = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ (lưu ý : x là vector đơn vị).

Khi đó ta có thể xem tỉ số $\frac{x^T A x}{x^T x}$ như *trung bình trọng lượng* của các giá trị riêng , trong đó trọng lượng của giá trị riêng λ_i là α_i^2.

Bây giờ ta xét không gian vector con U sinh bởi k vector đầu tiên, có nghĩa là $U = span(x_1, x_2, ..., x_k)$. Với mọi vector đơn vị $x \in U$, ta thu được $x^T A x = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i$ và $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1$. Trung bình trọng lượng này phải lớn hơn hoặc bằng với giá trị riêng nhỏ nhất trong k vector đầu tiên, có nghĩa là $\max_{\dim(U)=k} \min_{0 \neq x \in U} \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_k$ (*).

Mặt khác , xét không gian con U có số chiều k bất kì, đặt $V := span(x_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ thì hiển nhiên $\dim V = n - k + 1$. Do đó hai không gian con này phải có phần giao không tầm thường, có nghĩa là tồn tại một vector $z \in U \cap V$. Theo nhận xét , không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử $z = \sum_{j=k}^n \beta_j x_j$ là vector đơn vị , có nghĩa là $z^T z = \sum_{j=k}^n \beta_j^2 = 1$. Ta thu được $\frac{z^T A z}{z^T z} = \sum_{j=k}^n \beta_j^2 \lambda_j \leq \lambda_k$ (lưu ý : λ_k là vector lớn nhất trong số $n-k+1$ vector đứng sau). Do đó $\max_{\dim(U)=k} \min_{0 \neq x \in U} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \frac{z^T A z}{z^T z} \leq \lambda_k$ (**).

Từ (*) và (**) ta suy ra $\lambda_k = \max_{\dim(U)=k} \min_{0 \neq x \in U} \frac{x^T A x}{x^T x}$.

Bằng phương pháp lập luận tương tự ta suy ra được $\lambda_k = \min_{\dim(U)=k-1} \max_{0 \neq x \perp U} \frac{x^T A x}{x^T x}$

Kết quả 2: Đồ thị đều G có bậc d với giá trị riêng nhỏ nhất $\lambda_n > 0$ thì ta có $\alpha(G) \le \dfrac{n}{1-\dfrac{d}{\lambda_n}}$, trong đó $\alpha(G)$ là chỉ số độc lập của đồ thị G (xem bài viết **" Nguyên lý chuồng bồ câu"**)

Chứng minh : Gọi $S \subseteq V$ là tập con độc lập cực đại, $|S| = \alpha(G)$. Ta xét vector $x = n1_S - \alpha 1$, trong đó 1_S là vector đặc trưng của tập độc lập S, còn 1 là vector với tất cả các thành phần đều bằng 1). Sử dụng kết quả 1 cho $U = \mathbb{R}^n$ ta thu được $\dfrac{x^T Ax}{x^T x} \ge \lambda_n$.

Ta thực hiện khai triển $x^T Ax$ như sau : $x^T Ax = n^2 1_S^T A1_S - 2\alpha n 1_S^T A1 + \alpha^2 1^T A1$.
Sử dụng định nghĩa của tập độc lập ta suy ra $1_S^T A1_S = \sum_{i,j \in S} a_{ij} = 0$, $1_S^T A1 = d1_S^T.1 = \alpha(G)d$ và hiển nhiên $1A1A1 = d1.1 = dn$, thay thế các kết quả này vào hệ thức trên ta thu được:

$$x^T Ax = -2\alpha n.\alpha d + \alpha^2.dn = -\alpha^2 dn$$

và $x^T x = n^2 \|1_S\|^2 - 2\alpha n \langle 1_S, 1\rangle + \alpha^2 \|1\|^2 = n^2\alpha - 2\alpha^2 n + \alpha^2 n = \alpha n(n-\alpha)$

Từ các kết quả trên ta thu được đánh giá : $\lambda_n \le \dfrac{x^T Ax}{x^T x} = \dfrac{-\alpha(G)^2 dn}{\alpha(G)n(n-\alpha(G))} = \dfrac{d}{1-\dfrac{n}{\alpha(G)}}$

Từ đây ta suy ra : $\alpha(G) \le \dfrac{n}{1-\dfrac{d}{\lambda_n}}$, đpcm

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng của Jacob Fox – Math 307 : Combinatorics
[2]. Trương Phước Nhân, Đường đi ngẫu nhiên trên đồ thị, 20/07/2017