

Định lý Turan và các hướng tiếp cận trong chứng minh – phần 2

Trương Phước Nhân, 02/08/2017

(xem lại bài viết **“Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh”**)

Bài toán : (Turan) Nếu đồ thị $G=(V,E)$ trên n đỉnh không chứa $(k+1)$ -clique, $k \geq 2$, thì $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$.

Chứng minh thứ 4: (Dạng đối ngẫu của định lý Turan)

Để đơn giản quá và thuận tiện trong quá trình lập luận ta xét trường hợp n chia hết cho k .

Đầu tiên ta phát biểu lại định lý Turan dưới dạng đối ngẫu :

Bài toán Turan dạng đối ngẫu: Nếu một đồ thị G trên n đỉnh có $m < \binom{n}{2} - e(T_{n,r}) = r \binom{\frac{n}{r}}{2}$ cạnh thì đồ thị

G chứa một tập độc lập với kích thước $\geq r+1$, trong đó $e(T_{n,r})$ là số cạnh của đồ thị Turan $T_{n,r}$.

Chứng minh bài toán Turan dạng đối ngẫu:

Sử dụng kết quả ta đã thu được trong bài viết **“Phương pháp xác suất”** ta biết rằng một đồ thị G có n đỉnh và m cạnh thì đồ thị G chứa một tập độc lập có kích thước $\geq \frac{n^2}{2m+n}$.

Từ giả thiết ta suy ra, $\frac{n^2}{2m+n} > \frac{n^2}{2r \binom{\frac{n}{r}}{2} + n} = n \frac{\frac{n}{r}}{2 \left(\frac{\frac{n}{r}}{2} + \frac{n}{r} \right)} = n \frac{\frac{n}{r}}{\frac{n}{r} \left(\frac{n}{r} - 1 \right) + \frac{n}{r}} = r$ (lưu ý rằng $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$)

Do đó, đồ thị G chứa một tập độc lập với kích thước $\geq r+1$.

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Chứng minh thứ 5: (Xác suất + Tối ưu)

Xét một phân bố xác suất $p_1, p_2, \dots, p_n$ trên n đỉnh của đồ thị $G=(V,E)$ sao cho $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Ta tiến hành chọn ra hai đỉnh v_1, v_2 một cách độc lập theo phân bố trên thì xác suất để $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ là

$$P[\{v_1, v_2\} \in E] = \sum_{i,j: \{i,j\} \in E} p_i p_j$$

Bây giờ ta cần xem xét phân bố xác suất $p_1, p_2, \dots, p_n$ để cho $P[\{v_1, v_2\} \in E(G)]$ là lớn nhất có thể được.

Giả sử ban đầu ta có phân bố $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ta xét một phân bố xác suất mới như sau : Nếu có hai đỉnh không liên hợp nhau, ta tạm gọi là i, j thỏa $p_i, p_j > 0$, ta đặt $s_i = \sum_{k: \{i,k\} \in E} p_k$ và $s_j = \sum_{k: \{j,k\} \in E} p_k$. Nếu $s_i \geq s_j$, ta đặt

$p'_i = p_i + p_j$, $p'_j = 0$ và $p'_k = p_k$ với $k \neq i, j$; trong trường hợp $s_i < s_j$ ta đặt $p'_i = 0$, $p'_j = p_i + p_j$ và $p'_k = p_k$ với $k \neq i, j$. Bằng tính toán trực tiếp ta nhận ra rằng phân bố xác suất mới này làm cho $P[\{v_1, v_2\} \in E]$ tăng lên một lượng là $p_j(s_i - s_j)$ trong trường hợp $s_i \geq s_j$ hoặc $p_i(s_j - s_i)$ trong trường hợp $s_i < s_j$.

Do đó, theo thuật toán trên để $P[\{v_1, v_2\} \in E]$ lớn nhất thì không thể có hai đỉnh không liên hợp nhau mà cả hai đều có xác suất dương hay nói cách khác xác suất được tập trung trên một clique Q nào đó (các đỉnh không thuộc clique Q ta cho xác suất tương ứng bằng 0).

$$\text{Khi đó : } P[\{v_1, v_2\} \in E] = 1 - \sum_{i \in Q} p_i^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} 1 - \frac{\left(\sum_{i \in Q} p_i\right)^2}{|Q|} = 1 - \frac{1}{|Q|} \leq 1 - \frac{1}{k} \quad (*)$$

(lưu ý G không chứa $(k+1)$ -clique)

Mặt khác ta luôn có thể chỉ ra một phân bố đơn giản thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $p_i = \frac{1}{n}$ với mọi đỉnh i

Theo phân bố này thì $P[\{v_1, v_2\} \in E] = \frac{2}{n^2}|E|$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra: $\frac{2}{n^2}|E| \leq 1 - \frac{1}{k} \Rightarrow |E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Martin Aigner, Turan Graph Theorem, ??/10/1995
- [2]. Bài giảng tối ưu đồ thị trên mạng internet
- [3]. Bài giảng của Jacob Fox – Math 307 : Combinatorics
- [4]. Trương Phước Nhân, Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh, 15/07/2017
- [5]. Trương Phước Nhân, Phương pháp xác suất, 09/07/2017