

Đánh giá số cạnh của một đồ thị phẳng

Trương Phước Nhân, 15/08/2017

Bài toán: Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị phẳng liên thông với girth $g \geq 3$.

Chứng minh rằng: $|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 2)$

Chứng minh: Giả sử e_i với $i = 1, 2, \dots, |E|$ là các cạnh và f_j với $j = 1, 2, \dots, |F|$ là các mặt của đồ thị phẳng liên thông G , trong đó ta kí hiệu F là tập các mặt. Xét ma trận liên thuộc A có các hàng được đánh số bởi các cạnh và các cột được đánh số bởi các mặt, xác định như sau:
 $a_{ij} = 1$ nếu cạnh e_i nằm trên biên của mặt f_j ; $a_{ij} = 0$ trong trường hợp còn lại. Ta thực hiện đếm tổng số các phần tử của ma trận M theo hai cách sau:

Cách 1:

Xét hàng thứ i . Do cạnh e_i là cạnh biên của tối đa là 2 mặt nên tổng số các phần tử trên hàng này ≤ 2 :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|F|} a_{ij} &\leq 2|E| \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{|E|} \sum_{j=1}^{|F|} a_{ij} &\leq 2|E| \quad (*) \end{aligned}$$

Cách 2:

Xét cột thứ j . Do mặt f_j có tối thiểu là g cạnh biên nên tổng số các phần tử trên cột này $\geq g$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|E|} a_{ij} &\geq g \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{|F|} \sum_{i=1}^{|E|} a_{ij} &\geq g|F| \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $g|F| \leq 2|E|$

Mặt khác, từ công thức Euler cho đồ thị phẳng: $|F| = |E| - |V| + 2$ ta suy ra đánh giá: $|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 2)$

Tài liệu tham khảo:

[2]. Nguyễn Minh Hằng, Giáo trình Lý thuyết đồ thị, 1996.