Phép nghịch đảo đối xứng

Nguyễn Văn Linh

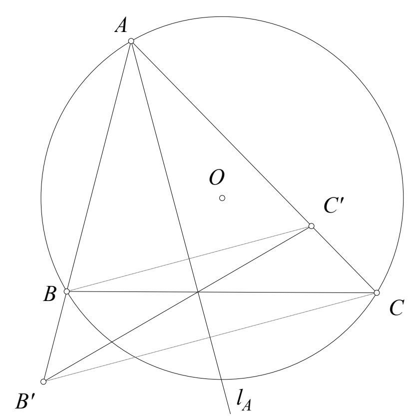
Năm 2016

1 Phép nghịch đảo đối xứng trong tam giác

Khi học về phép nghịch đảo, theo kinh nghiệm chúng ta cần ghi nhớ một số tâm nghịch đảo thông dụng. Một trong số đó là chọn một đỉnh của tam giác làm tâm.

Để minh họa cho ý tưởng của bài viết ta xét một tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), khi đó phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$:

$\mathcal{I}_A^{AB\cdot AC}$: $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, $(O) \leftrightarrow B'C'$.



Nếu ta giữ nguyên phép nghịch đảo này thì các điểm trong bài toán ban đầu sẽ biến thành các điểm mới và gây khó khăn trong việc vẽ hình và quan sát. Tuy nhiên không khó nhận ra B' và C' lần lượt là điểm đối xứng của C và B qua phân giác góc A. Do đó ta có thể dùng một phép biến hình $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo $\mathcal{I}_A^{AB\cdot AC}$ và phép đối xứng qua phân giác góc A- kí hiệu $\mathcal{S}_{l_A}$:

$\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_A} \circ \mathcal{I}_A^{AB\cdot AC} : B \leftrightarrow C$. Do đó $(O) \leftrightarrow BC$.

Như vậy ta đã loại bỏ được hai điểm B', C' và giúp hình vẽ của bài toán trở nên đơn giản.

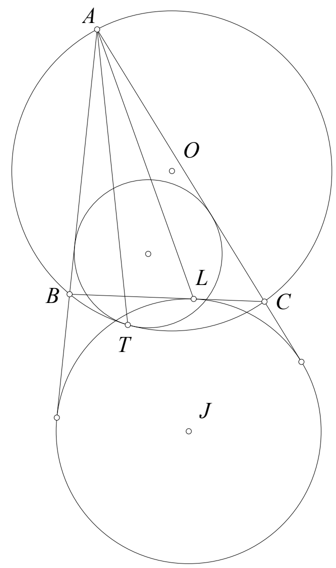
Ta thường sử dụng hợp của phép nghịch đảo và phép đối xứng trục phân giác, gọi tắt là phép nghịch đảo đối xứng, trong các phép nghịch đảo tâm A có phương tích dạng sau:

Hai điểm E, F lần lượt nằm trên AB, AC sao cho $EF \parallel BC$. Khi đó $AB \cdot AF = AC \cdot AE = k$. Ta chọn $\mathcal{I}_A^k$.

Chú ý rằng có hai trường hợp hay sử dụng nhất là $\mathcal{I}_A^{AB\cdot AC}$ và $\mathcal{I}_A^{\frac{1}{2}AB\cdot AC}$.

Sau đây chúng ta đến với một số ví dụ minh họa.

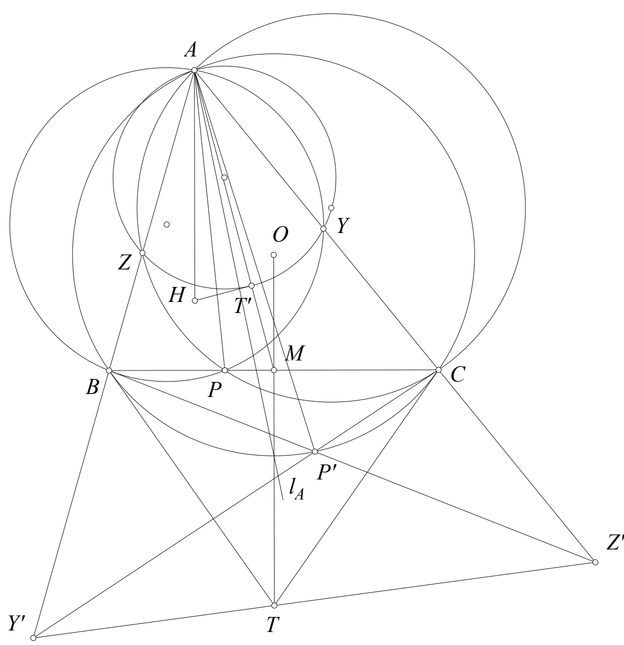
Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi T là tiếp điểm của đường tròn ω- đường tròn A-mixtilinear nội tiếp- với (O), L là tiếp điểm của đường tròn (J) bàng tiếp góc A với BC. Chứng minh rằng AT và AL đẳng giác trong $\angle BAC$.



Chứng minh. Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

$\mathcal{F} : B \leftrightarrow C$, $BC \leftrightarrow (O)$. Do ω tiếp xúc trong với (O), tiếp xúc với AB, AC nên ảnh của ω qua $\mathcal{F}$ là một đường tròn tiếp xúc với AB, AC, BC và nằm khác phía với A bờ BC, tức là $\omega \leftrightarrow (J)$. Suy ra $T \leftrightarrow L$ hay AT, AL đẳng giác trong $\angle BAC$. □

Bài 2. *(ELMO Shortlist 2013)* Cho tam giác ABC. P là một điểm chuyển động trên BC. (ABP) giao AC tại Y, (ACP) giao AB tại Z. Chứng minh rằng (AYZ) luôn đi qua một điểm cố định khác A.



Chứng minh. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$, gọi X' là ảnh của X qua phép biến hình này.

$\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_A} \circ \mathcal{I}_A^{AB \cdot AC} : B \leftrightarrow C$, $BC \leftrightarrow (O)$, $AC \leftrightarrow AB$.

Do P là nằm trên BC nên P' là điểm sao cho AP và AP' đẳng giác trong góc A đồng thời $P' \in (O)$. Ta có $(ABP) \leftrightarrow CP'$. Do Y là giao của (ABP) và AC nên Y' là giao của CP' và AB. Tương tự Z' là giao của BP' và AC. Như vậy bài toán trở thành.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P' là một điểm chuyển động trên (O). BP' giao AC tại Z', CP' giao AB tại Y'. Chứng minh rằng $Y'Z'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Tuy nhiên theo định lý Pascal suy biến cho 4 điểm A, B, B, P', C, C, ta biết rằng $Y'Z'$ đi qua giao điểm T của hai tiếp tuyến tại B và C của (O). Vậy $Y'Z'$ luôn đi qua T cố định. Mà (AYZ) là ảnh của $Y'Z'$ qua phép biến hình $\mathcal{F}$ nên (AYZ) luôn đi qua T' cố định. □

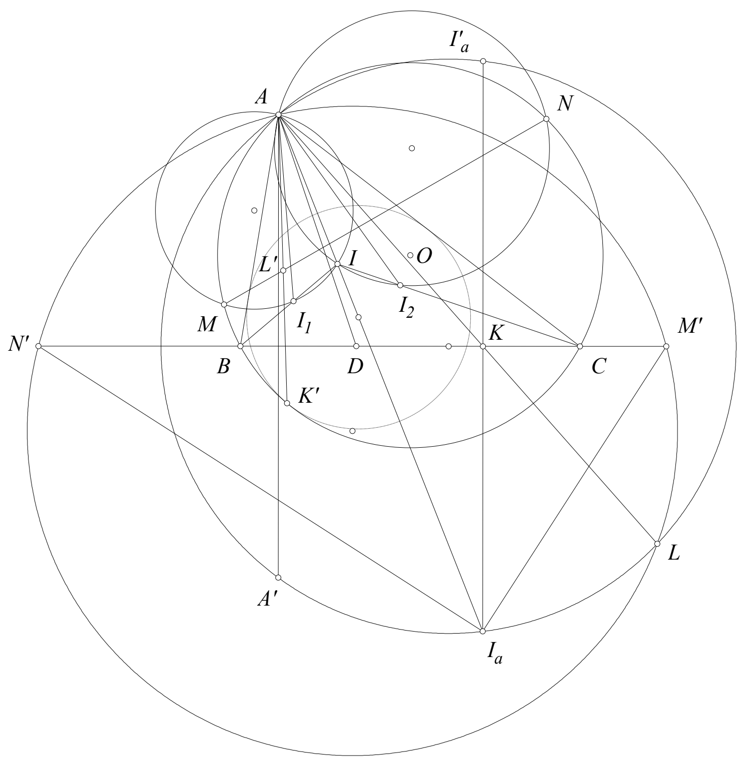
Nhận xét. - Ta có thể xác định chính xác điểm T' như sau.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC. A' đối xứng với A qua BC. Dễ thấy $\mathcal{F} : O \leftrightarrow A'$, suy ra $(BOC) \leftrightarrow (BA'C)$ hay $(BOC) \leftrightarrow (BHC)$. Do $T \in (BOC)$ nên $T' \in (BHC)$.

Mặt khác do T nằm trên đường đối trung ứng với đỉnh A nên T' nằm trên đường trung tuyến AM. Vậy T' là giao của (BHC) và trung tuyến AM, hay một cách xác định khác là hình chiếu của H trên AM.

- Bạn đọc có thể tìm thấy lời giải không sử dụng phép nghịch đảo đối xứng tại [1].

Bài 3. *(Iran TST 2014)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một điểm D chuyển động trên đoạn thẳng BC. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADB, ADC. $(AII_1), (AII_2)$ lần lượt cắt (O) lần thứ hai tại M, N. Chứng minh rằng khi D chuyển động, MN luôn đi qua một điểm cố định.



Chứng minh. Ta có $\angle AI_1I + \angle AI_2I = \frac{1}{2}(\angle ABD + \angle BAD) + \frac{1}{2}(\angle ACD + \angle CAD) = 90°$. Do đó hai đường tròn (AII_1) và (AII_2) trực giao.

Mặt khác gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Dễ thấy $\triangle ABI \sim \triangle AI_aC$ nên $AI \cdot AI_1 = AB \cdot AC$.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_A} \circ \mathcal{I}_A^{AB \cdot AC}$.

$\mathcal{F}$: $B \leftrightarrow C$, $I \leftrightarrow I_a$, $M \leftrightarrow M'$, $N \leftrightarrow N'$.

Do (AII_1) và (AII_2) trực giao nên $I_aM' \perp I_aN'$. Kẻ $I_aK \perp BC$. AK cắt $(AM'N')$ lần thứ hai tại L. Ta có $KA \cdot KL = KM' \cdot KN' = KI_a^2$. Suy ra $KL = \dfrac{KI_a^2}{KA} = const$. Suy ra $(AM'N')$ luôn đi qua L cố định. Từ đó MN luôn đi qua ảnh L' của L qua $\mathcal{F}$ và L' là điểm cố định. □

Nhận xét. Ta có thể xác định chính xác điểm L' như sau.

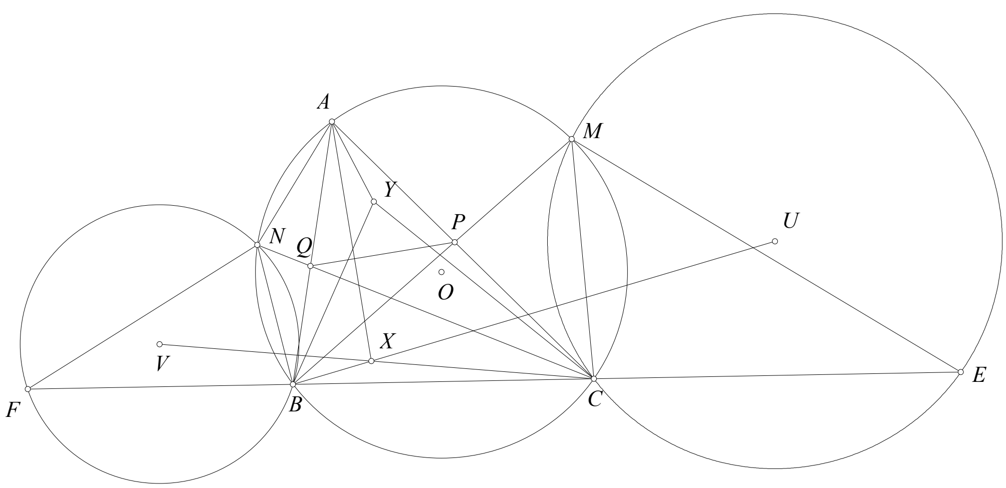
Gọi K' là tiếp điểm của (J)- đường tròn A-mixtilinear với (O). Theo bài toán 1 ta có K và K' là ảnh của nhau qua $\mathcal{F}$. Do đó $L' \in AK'$.

Gọi A', I'_a lần lượt là điểm đối xứng với A, I_a qua BC. Ta có $AA'I_aI'_a$ là hình thang cân. Do $KI_a^2 = KA \cdot KL$ nên $KA \cdot KL = KI_a \cdot KI'_a$. Suy ra tứ giác AI'_aLI_a nội tiếp. Suy ra A, A', I_a, L đồng viên.

Dễ thấy $\mathcal{F} : O \leftrightarrow A'$ nên L, I, O thẳng hàng.

Như vậy L' là giao của AK' và OI. Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho 3 đường tròn $(I), (O)$ và (J) suy ra L' là tâm vị tự ngoài của (O) và (I).

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác $\angle ABC$ cắt AC tại P, cắt (O) tại M, phân giác $\angle ACB$ cắt AB tại Q, cắt (O) tại N. Gọi E, F là các điểm nằm trên BC sao cho $CE = CA$, $BF = BA$ và theo thứ tự F, B, C, E. Gọi U, V lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác MCE, NBF. BU giao CV tại X. Chứng minh rằng $AX \perp PQ$.



Chứng minh. Ta có $\triangle ABP \sim \triangle MBC$ nên $BP \cdot BM = BA \cdot BC$.

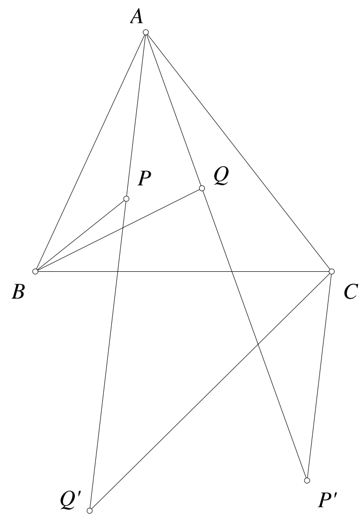
Mặt khác $\dfrac{BQ}{AQ} = \dfrac{BC}{AC}$ nên $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{BC}{BC + AC} = \dfrac{BC}{BE}$. Do đó $BQ \cdot BE = BA \cdot BC$.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_B} \circ \mathcal{I}_B^{BA \cdot BC}$.

$\mathcal{F}$: $A \leftrightarrow C$, $P \leftrightarrow M$, $Q \leftrightarrow E$. Suy ra $(APQ) \leftrightarrow (CME)$. Gọi Y là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ thì hai đường BY, BU đẳng giác trong $\angle ABC$.

Chứng minh tương tự, CY, CV đẳng giác trong $\angle ACB$. Suy ra X và Y liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC, suy ra AX, AY đẳng giác trong $\angle BAC$. Mà AU là đường nối tâm đường tròn ngoại tiếp với đỉnh A của tam giác APQ nên AX là đường cao của tam giác APQ. Vậy $AX \perp PQ$. $\square$

Bài 5. Cho tam giác ABC và hai điểm P, Q liên hợp đẳng giác. Chứng minh rằng ảnh của P, Q qua hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác góc A cũng là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_A} \circ \mathcal{I}_A^{AB\cdot AC}$.

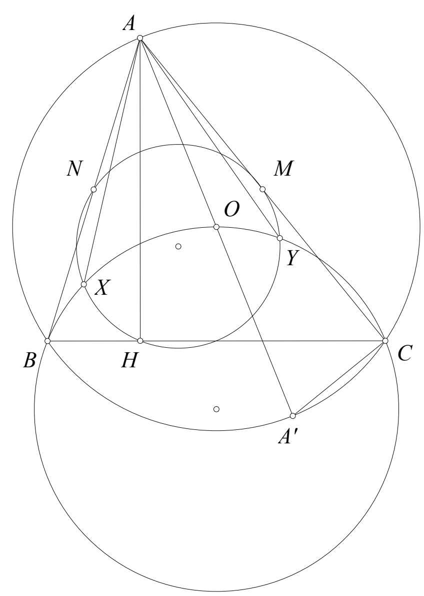
Ta có $\mathcal{F} : P \leftrightarrow P', Q \leftrightarrow Q'$.

Do đó $\triangle APB \sim \triangle ACP'$, $\triangle AQB \sim \triangle ACQ'$.

Suy ra $\angle ACP' = \angle APB$, $\angle ACQ' = \angle AQB$.

Ta có $\angle BCP' = \angle ACP' - \angle ACB = \angle APB - \angle ACB = \angle PAC + \angle PBC = \angle BAQ + \angle ABQ = 180^\circ - \angle AQB = 180^\circ - \angle ACQ'$. Suy ra hai đường CP', CQ' đẳng giác trong $\angle ACB$. Mà AP', AQ' đẳng giác trong $\angle BAC$ nên P' và Q' liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC. $\square$

Bài 6. *(Serbian MO 2013)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Giả sử đường tròn Euler của tam giác ABC và đường tròn (BOC) cắt nhau tại hai điểm X, Y. Chứng minh rằng AX và AY đẳng giác trong $\angle BAC$.



Chứng minh. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB, H là hình chiếu của A trên BC, A' là điểm đối xứng với A qua O.

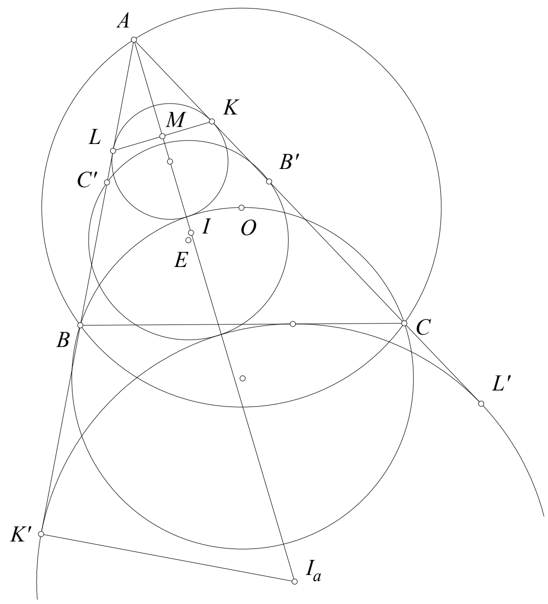
Ta có $\triangle AHB \sim \triangle ACA'$ nên $AH \cdot AA' = AB \cdot AC$. Suy ra $AH \cdot AO = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $\dfrac{1}{2}AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

$\mathcal{F}: M \leftrightarrow B$, $N \leftrightarrow C$, $O \leftrightarrow H$ nên $(MNH) \leftrightarrow (BOC)$. Do (MNH) giao (BOC) tại hai điểm X, Y nên $X \leftrightarrow Y$. Suy ra AX và AY đẳng giác trong $\angle BAC$. $\square$

Nhận xét. Trong những bài toán xuất hiện đường tròn (BOC) và đường tròn Euler ta có thể chọn phương tích $\frac{1}{2}AB \cdot AC$ vì có thể biến (BOC) thành đường tròn Euler của tam giác ABC. Nếu xuất hiện (BHC), ta có thể chọn phương tích $AB \cdot AC$, (BOC) sẽ biến thành đường tròn (BHC).

Bài 7. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường tròn ω nằm trong tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại L, K và tiếp xúc ngoài với (BOC). Chứng minh rằng LK chia đôi AI với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Chứng minh. Gọi (E) là đường tròn Euler của tam giác ABC.

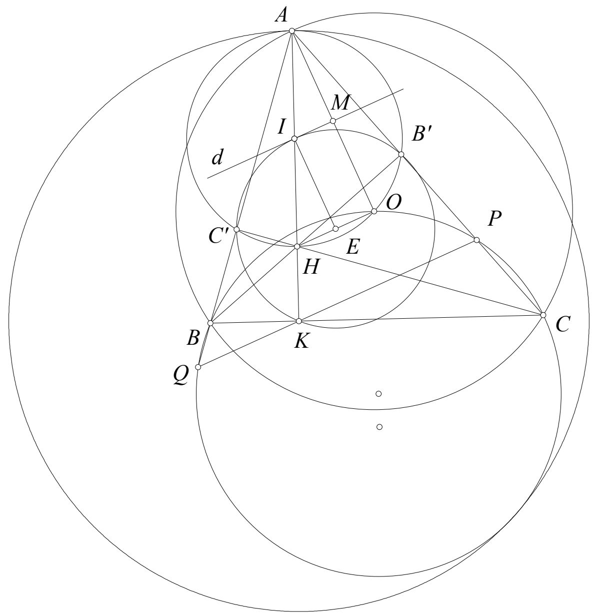
Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $\frac{1}{2}AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

Theo bài toán , $\mathcal{F}$: $(BOC) \leftrightarrow (E)$. Do ω tiếp xúc với (BOC), AB, AC và nằm trong tam giác ABC nên ảnh của ω qua $\mathcal{F}$ là đường tròn tiếp xúc với AB, AC, (E) và nằm ngoài tam giác ABC hay ảnh của ω chính là đường tròn bàng tiếp (I_a) của tam giác ABC. Gọi K', L' lần lượt là tiếp điểm của (I_a) với AB, AC. Ta có ω tiếp xúc với AC, AB lần lượt tại K', L' nên $\mathcal{F}: K \leftrightarrow K'$, $L \leftrightarrow L'$.

Gọi M là giao của LK với AI. Ta có tứ giác LMI_aK' nội tiếp nên $AM \cdot AI_a = AL \cdot AK' = AK \cdot AK' = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AI \cdot AI_a$. Suy ra $AM = \frac{1}{2}AI$. Ta có đpcm. $\square$

Nhận xét. Bạn đọc có thể tìm thấy lời giải khác tại [2].

Bài 8. *(drmzjoseph)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (BOC) cắt AC, AB lần lượt tại P, Q. Kẻ $AK \perp BC$. Chứng minh rằng P, K, Q thẳng hàng khi và chỉ khi (K, KA) tiếp xúc với (BOC).



Chứng minh. Gọi (E) là đường tròn Euler của tam giác ABC, trực tâm H. Các đường cao BB', CC'.

Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $\frac{1}{2}AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

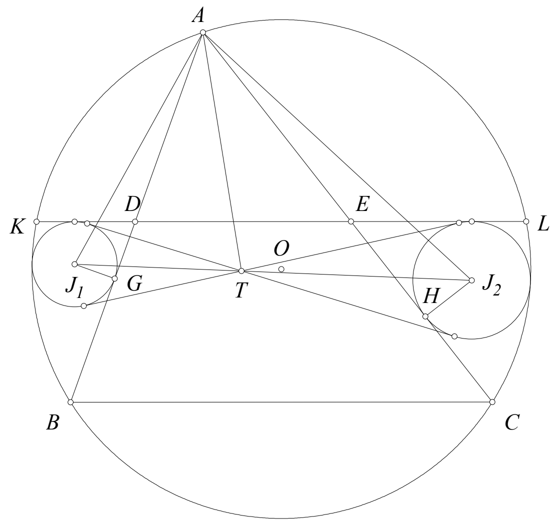
Ta biết rằng $\mathcal{F}$: $(BOC) \leftrightarrow (E)$, $AC \leftrightarrow AB$. Do (BOC) giao AC tại P nên $P \leftrightarrow C'$, tương tự $Q \leftrightarrow B'$. Như vậy P, K, Q thẳng hàng khi và chỉ khi A, B', C', O đồng viên hay $\angle AOH = 90°$.

Lại có $O \leftrightarrow K$, do đó $(K, KA) \leftrightarrow d$ là đường trung trực của AO. Suy ra (K, KA) tiếp xúc với (BOC) khi và chỉ khi d tiếp xúc với (E).

Bài toán trở thành chứng minh $\angle AOH = 90°$ khi và chỉ khi d tiếp xúc với (E).

Gọi I, M lần lượt là trung điểm AH, AO. Ta có $IMOE$ là hình bình hành. Do đó $\angle AOH = 90°$ khi và chỉ khi $IMOE$ là hình chữ nhật, điều này tương đương IM là trung trực của AO và $\angle EIM = 90°$ hay trung trực của AO tiếp xúc với (E) tại I. Bài toán được chứng minh. □

Bài 9. *(RMM 2011).* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng l thay đổi song song với BC, cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D, E, cắt (O) tại K, L sao cho D nằm giữa K và E. Đường tròn (J_1) tiếp xúc với các đoạn thẳng KD, BD và tiếp xúc trong với (O), (J_2) tiếp xúc với các đoạn thẳng LE, CE và tiếp xúc trong với (O). Chứng minh rằng khi l chuyển động thì giao của hai tiếp tuyến chung trong của (J_1) và (J_2) chuyển động trên một đường thẳng cố định.



Chứng minh. Trong bài toán này ta thấy yếu tố $DE \parallel BC$. Từ đó $AD \cdot AC = AE \cdot AB = k$. Ta nghĩ tới phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = S_{l_A} \circ \mathcal{I}_A^k$.

$\mathcal{F} : D \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow B$. Do đó $DE \leftrightarrow (O)$.

Ta xét xem ảnh của (J_1) và (J_2) qua phép nghịch đảo đối xứng này. Cần xác định chính xác ảnh vì có nhiều đường tròn tiếp xúc với $DE, AB, (O)$ và $DE, AC, (O)$.

Do (J_1) tiếp xúc với DE và nằm khác phía với A bờ DE nên ảnh của (J_1) là một đường tròn tiếp xúc trong với (O). Lại có (J_1) tiếp xúc trong với (O) nên ảnh của (J_1) nằm khác phía với A bờ DE. Cuối cùng (J_1) nằm ngoài $\angle BAC$ nên ảnh của (J_1) cũng phải nằm ngoài $\angle BAC$. Từ các giới hạn miền mặt phẳng trên ta nhận thấy ảnh của (J_1) chính là (J_2). Vậy $\mathcal{F} : (J_1) \leftrightarrow (J_2)$. Suy ra AJ_1 và AJ_2 đẳng giác trong $\angle BAC$.

Kẻ $J_1G \perp AB$, $J_2H \perp AC$. Gọi T là giao của hai tiếp tuyến chung trong của (J_1) và (J_2). Ta có $\triangle AGJ_1 \sim \triangle AHJ_2$ nên $\dfrac{AJ_1}{AJ_2} = \dfrac{J_1G}{J_2H} = \dfrac{TJ_1}{TJ_2}$. Suy ra AT là phân giác $\angle J_1AJ_2$ hay T nằm trên phân giác $\angle BAC$. Vậy T chuyển động trên một đường thẳng cố định. □

2 Phép nghịch đảo đối xứng trong tứ giác toàn phần

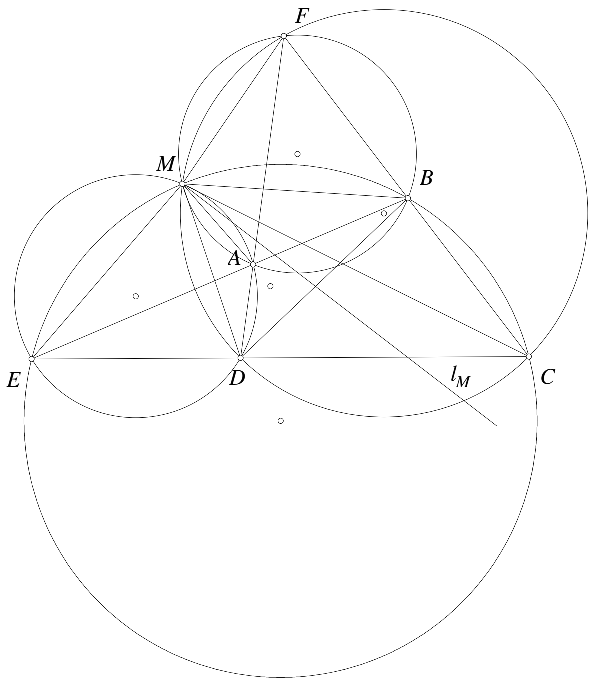
Trên mặt phẳng cho một tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Ta biết rằng các đường tròn (FAB), (FCD), (EAD), (EBC) đồng quy tại một điểm M gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Vì M là điểm đồng quy của các đường tròn trên nên M là tâm của phép vị tự quay biến AB thành CD, FD thành BE (xem [3]).

Như vậy ta thu được $\triangle MBC \sim \triangle MAD$, $\triangle MFB \sim \triangle MDE$.

Từ đó dễ thấy $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF = k$ đồng thời các góc $\angle AMC$, $\angle BMD$ và $\angle EMF$ có chung phân giác l_M.

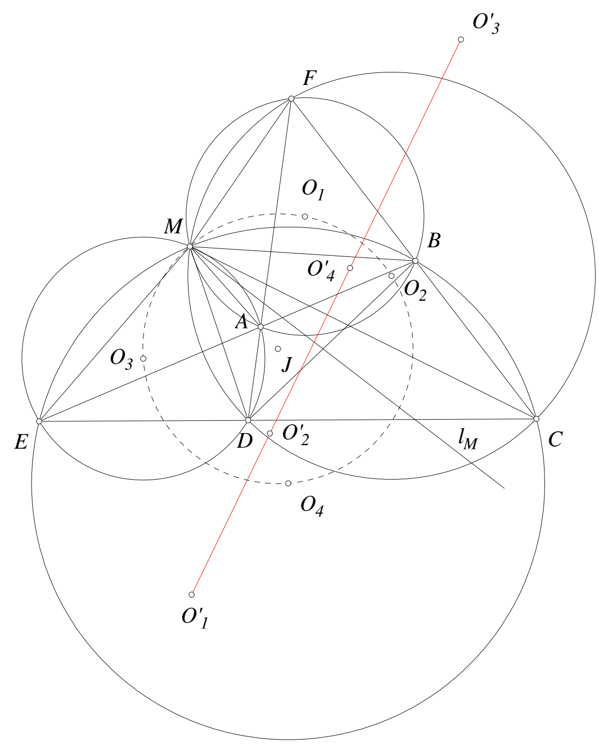
Như vậy trong các bài toán về tứ giác toàn phần, ta có thể chọn phép nghịch đảo tâm M, phương tích k hợp với phép đối xứng qua phân giác l_M.

$F = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$: $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow F$.



Để minh họa cho phép biến hình này chúng ta đến với một số ví dụ sau.

Bài 10. *(Đường tròn Miquel)*. Cho tứ giác toàn phần $ABCD.EF$, M là điểm Miquel. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác FAB, FCD, EAD, EBC. Chứng minh rằng M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh. Xét phép nghịch đảo đối xứng $F = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$:

$A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow F$.

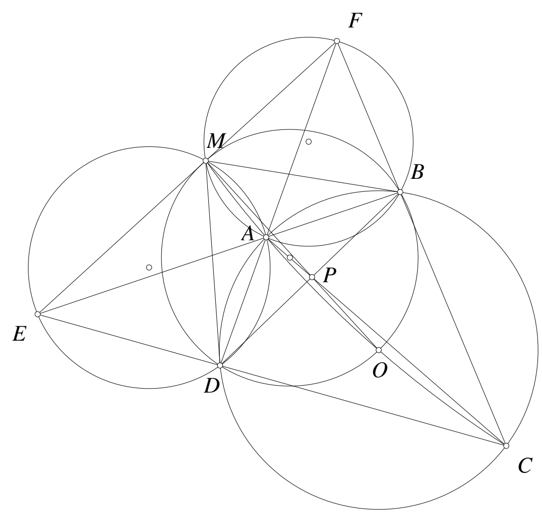
Do đó $(O_1) \leftrightarrow CD$, $(O_2) \leftrightarrow AB$, $(O_3) \leftrightarrow BC$, $(O_4) \leftrightarrow AD$.

Vì tâm của đường tròn qua tâm nghịch đảo biến thành điểm đối xứng với tâm nghịch đảo qua đường thẳng ảnh nên ảnh của O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là điểm đối xứng của M qua CD, AB, BC, AD. Lại có hình chiếu của M trên 4 cạnh AB, BC, CD, DA cùng nằm trên đường thẳng Simson d của M ứng với 4 tam giác FAB, FCD, EAD, EBC do đó các điểm đối xứng với M qua 4 cạnh tứ giác $ABCD$ nằm trên đường thẳng ảnh của d qua phép vị tự tâm M, tỉ số 2 (đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần). Vậy M, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn. $\square$

Nhận xét. Tuy rằng ta có thể chứng minh bài toán chỉ bằng phép cộng góc hoặc đường thẳng Simson đảo, lời giải trên cho chúng ta một cái nhìn khá thú vị: *đường tròn Miquel và đường thẳng Steiner là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo đối xứng tâm M.*

Tiếp theo ta xét trường hợp tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

Bài 11. Cho tứ giác toàn phần $ABCD.EF$ sao cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng điểm Miquel M của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$ là hình chiếu của O trên EF.

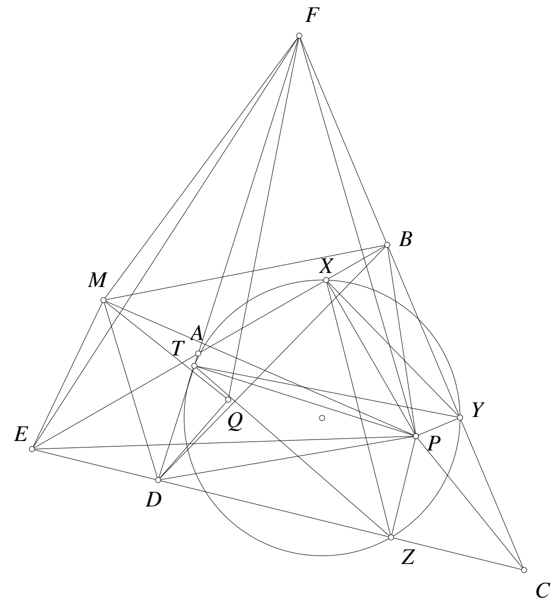


Chứng minh. Ta thấy $\angle EMA + \angle FMA = \angle ADC + \angle ABC = 180°$ nên M nằm trên EF. Xét phép nghịch đảo đối xứng $F = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k : A \leftrightarrow C,\ B \leftrightarrow D$. Do đó (O) được giữ nguyên qua $\mathcal{F}$. Điều này chứng tỏ O nằm trên phân giác $\angle EMF$ hay $OM \perp EF$. $\square$

Nhận xét. Ta có thể chứng minh thêm ảnh của O qua phép trên là giao điểm của AC và BD. Thật vậy, vì $OA = OB, OC = OD$ và MO là phân giác $\angle DMB$ và $\angle AMC$ nên các tứ giác $MAOC$, $MBOD$ nội tiếp. Gọi giao điểm của MO với CA là P thì $MO \cdot MP = MA \cdot MC$. Tương tự suy ra MO, AC, BD đồng quy tại P.

Đồng thời $MO \cdot MP = ME \cdot MF$ nên O là trực tâm tam giác EPF. Ta thu được định lý Brocard nổi tiếng.

Bài 12. Cho tứ giác toàn phần $ABCD.EF$ với M là điểm Miquel. Giả sử tồn tại hai điểm P và Q liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng P và Q là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo đối xứng $F = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$.



Chứng minh. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là hình chiếu của P trên AB, BC, CD, DA. Do P và Q liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$ nên tứ giác $XYZT$ nội tiếp đường tròn có tâm là trung điểm PQ.

Ta chứng minh $\angle FPB = \angle EPD$.

Thật vậy, $\angle FPB = \angle FPY - \angle BPY = \angle FTY - \angle BXY$; $\angle EPD = \angle EPZ - \angle DPZ = \angle EXZ - \angle DTZ$.

Do đó $\angle FPB = \angle EPD$ khi và chỉ khi $\angle FTY - \angle BXY = \angle EXZ - \angle DTZ$.

Điều này tương đương $\angle FTY + \angle DTZ = \angle EXZ + \angle BXY$ hay $\angle ZTY = \angle ZXY$, hiển nhiên đúng.

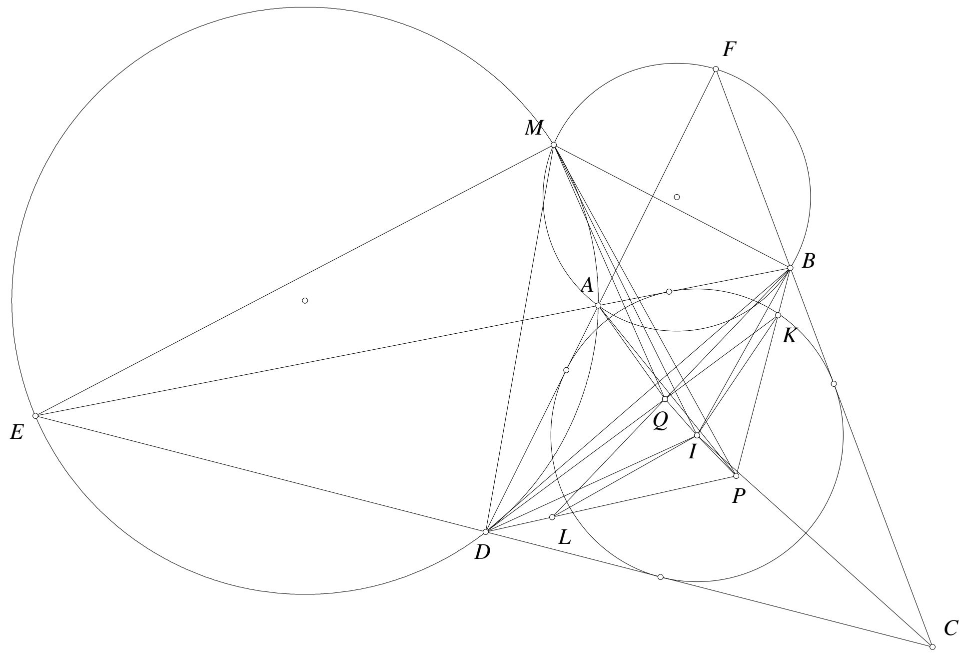
Gọi Q' là ảnh của P qua phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$.

Ta có $MP \cdot MQ' = ME \cdot MF = MB \cdot MD$ nên $\triangle MQ'D \sim \triangle MBP$, $\triangle MQ'F \sim \triangle MEP$. Suy ra $\angle DQ'F = \angle MQ'D + \angle MQ'F = \angle MBP + \angle MEP = 360^\circ - \angle EMB - \angle BPE = 180^\circ - \angle DPF + \angle DCF$.

Lại có $\angle DQF = 180^\circ - \angle DFQ - \angle FDQ = 180^\circ - \angle PFC - \angle PDC = 180^\circ - \angle DPF + \angle DCF$. Do đó $\angle DQF = \angle DQ'F$. Chứng minh tương tự, $\angle DQC = \angle DQ'C$, $\angle CQF = \angle CQ'F$. Suy ra $Q' \equiv Q$. Ta có đpcm. □

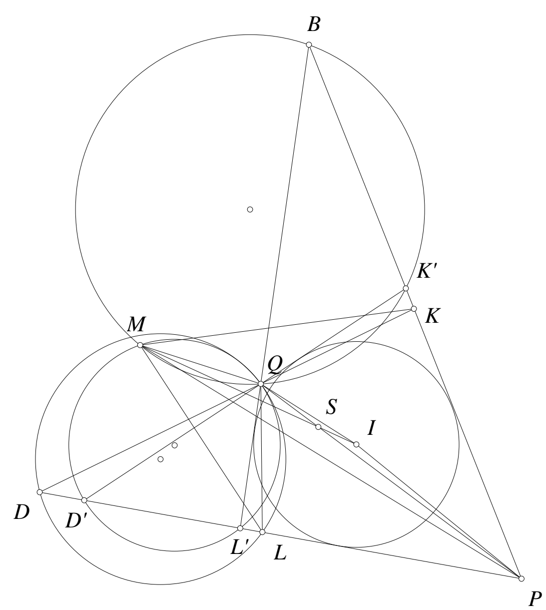
Nhận xét. Nếu tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), ta thấy I liên hợp đẳng giác với chính nó trong tứ giác $ABCD$. Do đó $MI^2 = MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$ và $MI \equiv l_M$.

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB, CD và AD, BC. M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. P là điểm thỏa mãn PI là đường phân giác của $\angle EPF$. Gọi Q là ảnh của P qua phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$. Chứng minh rằng tứ giác $BPDQ$ ngoại tiếp.



Chứng minh. Ta có $\angle DQI = \angle DMI + \angle MDQ + \angle QIM = \angle DMI + \angle MPB + \angle MPI = \angle DMI + \angle BPI$. Chứng minh tương tự, $\angle BQI = \angle BMI + \angle DPI$ nên $\angle DQI = \angle BQI$.

Gọi L, K lần lượt là giao điểm của BQ với DP, DQ với BP. Do M là tâm của phép vị tự quay biến BQ thành PD nên M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $LQKP.BD$.

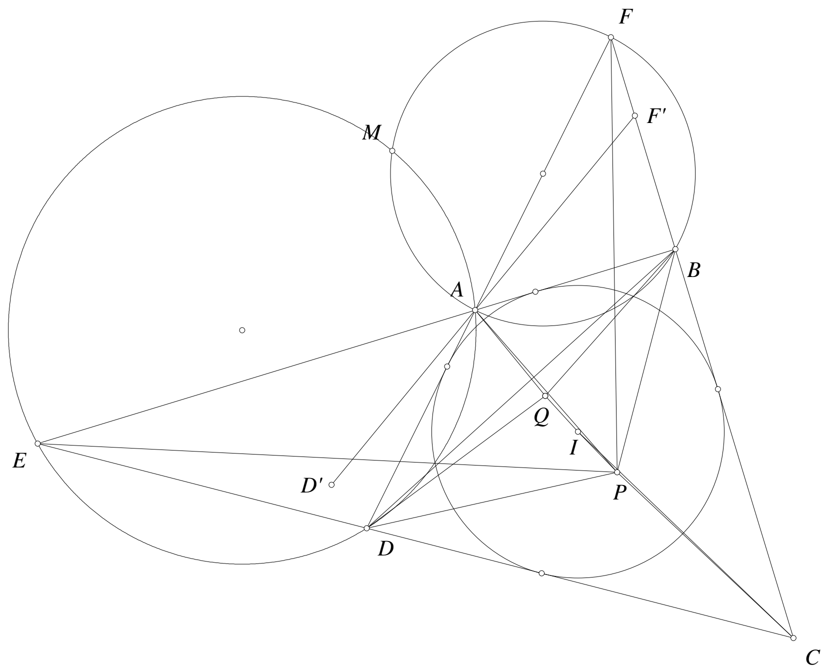


Dựng đường tròn ω tâm I tiếp xúc với hai cạnh PL, PK. Từ Q kẻ hai tiếp tuyến QL', QK' tới ω. QL' cắt BP tại B', QK' cắt DP tại D'. Gọi M' là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $QK'PL'.DB$. Theo nhận xét trên ta có $M'I$ là phân giác $\angle QM'P$ và $M'I^2 = M'P \cdot M'Q$. Suy ra $\dfrac{M'Q}{M'P} = \dfrac{M'Q}{M'I} \cdot \dfrac{M'I}{M'P} = \dfrac{QI^2}{PI^2}$. Do đó M' nằm trên đường tròn Apollonius λ của đoạn thẳng QP ứng với tỉ số $\dfrac{QI^2}{PI^2}$. Do $M'I$ là phân giác $\angle QM'P$ nên trên PQ lấy điểm S sao cho $\dfrac{SQ}{SP} = \dfrac{QI^2}{PI^2}$ thì M' là giao của IS với λ.

Lại có $MI^2 = MP \cdot MQ$ và MI là phân giác $\angle PMQ$ nên chứng minh tương tự ta cũng có M là giao của IS với λ hay $M' \equiv M$.

Điều này nghĩa là (DLQ) và $(D'L'Q)$ có giao điểm thứ hai là M. Nhưng điều này không xảy ra vì hai đường QL', QD' đẳng giác trong $\angle DQL$ nên $(D'L'Q)$ tiếp xúc với (DLQ). Vậy $L' \equiv L$, tương tự $K' \equiv K$. Ta thu được tứ giác $DKPL$ ngoại tiếp. Suy ra tứ giác $BPDQ$ ngoại tiếp. $\square$

Bài 14. *(Trần Minh Ngọc)* Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AB, CD và AD, BC. P là điểm thỏa mãn PO là đường phân giác của $\angle EPF$. Chứng minh rằng PO cũng là đường phân giác của $\angle APC$ và $\angle BPD$.



Chứng minh. Theo bài toán 13, nếu ta gọi Q là ảnh của P qua phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F} = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k$ thì BP, BQ đẳng giác trong $\angle ABC$. Dựng điểm D' sao cho AP, AQ và CP, CQ lần lượt là cặp liên hợp đẳng giác trong $\angle D'AB$ và $\angle D'CB$. Khi đó P và Q liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD'$. Gọi M' là điểm Miquel của tứ giác $ABCD'$.

Theo bài tóan 12 ta có phép nghịch đảo đối xứng tâm M' lần lượt biến A thành C, Q thành P nên $\triangle M'AQ \sim \triangle M'PC$ hay M' là tâm của phép vị tự quay biến đoạn thẳng AQ thành PC.

Mặt khác, $\triangle MAQ \sim \triangle MPC$ nên M cũng là tâm của phép vị tự quay biến đoạn thẳng AQ thành PC. Do đó $M' \equiv M$.

Gọi F' là giao của $D'A$ với FB suy ra $(AF'B)$ giao (AFB) tại M. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $F' \equiv F$. Tương tự suy ra $D' \equiv D$. Vậy hai điểm P, Q liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$. Theo lời giải bài 12, $\angle FPB = \angle EPD$, do đó PI đồng thời là phân giác của $\angle EPF$. Tương tự, PI cũng là phân giác của $\angle APC$. $\square$

Để kết thúc phần 2 chúng ta đến với một kết quả rất thú vị sau.

Bài 15. *(Trần Quang Hùng)* Cho tứ giác toàn phần $ABCD.EF$ sao cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Gọi M là điểm Miquel. Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm M biến 4 đỉnh của tứ giác $ABCD$ thành 4 đỉnh của một tứ giác ngoại tiếp.

Chứng minh. Ta có thể chọn phương tích bất kì và do phép đối xứng qua phân giác l_M không làm thay đổi tính chất của phép nghịch đảo nên xét $F = \mathcal{S}_{l_M} \circ \mathcal{I}_M^k : A \leftrightarrow C,\ B \leftrightarrow D$. Như vậy qua $\mathcal{F}$, các đỉnh của tứ giác $ABCD$ tráo đổi cho nhau. Do đó trong trường hợp k bất kì, ảnh của các đỉnh A, B, C, D là các đỉnh của một tứ giác ngoại tiếp. $\square$

Nhận xét. Bài toán đã được tác giả nghiên cứu trong một bài viết khác với lời giải sơ cấp hơn, bạn đọc có thể tìm thấy tại [4].

Như vậy cấu hình điểm Miquel của tứ giác toàn phần cung cấp cho ta một phép nghịch đảo đối xứng khá thú vị. Những ứng dụng khác của phép biến hình này đang chờ bạn đọc khám phá.

3 Bài tập

Bài 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có B, C cố định, A chuyển động. Dựng đường tròn ω_1 qua A, C và tiếp xúc với AB, đường tròn ω_2 qua A, B và tiếp xúc với AC. ω_1 giao ω_2 lần thứ hai tại P. Chứng minh rằng AP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 17. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác AD, M là trung điểm BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng khi A chuyển động trên cung BC, đường tròn (J, JD) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi X là tiếp điểm của đường tròn A-mixtilinear nội tiếp với (O). Chứng minh rằng hai đường tròn A-mixtilinear nội tiếp của các tam giác ABX, ACX tiếp xúc nhau.

Bài 19. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. Kẻ $HE \perp AD$. Gọi M là trung điểm AH. ME cắt AI tại F. Chứng minh rằng (F, FE) tiếp xúc với (BHC).

Bài 20. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) giao nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của (O_1) cắt (O_2) tại C, tiếp tuyến tại A của (O_2) cắt (O_1) tại D. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD. I_1I_2 cắt AB tại E. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.

Bài 21. *(ARMO 2011- mở rộng)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi N là điểm chính giữa cung BAC, M là điểm bất kì nằm trên trung trực BC, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AMB, AMC. Chứng minh rằng A, N, I_1, I_2 cùng thuộc một đường tròn.

Bài 22. *(IMO 2014)* Cho tứ giác $ABCD$ có các góc B và D vuông. AH là đường cao tam giác ABD. S, T lần lượt thuộc AB, AC thỏa mãn $\angle BSH + \angle SCH = \angle DTH + \angle TCH = 90^\circ$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác (HST) tiếp xúc với BD.

Bài 23. *(ELMO 2014)* Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC và BHC. Giả sử đường tròn đường kính AO cắt ω_1 tại M, AM cắt ω_1 tại X. Đường tròn đường kính AH cắt ω_2 tại N, AN cắt ω_2 tại Y. Chứng minh rằng $MN \parallel XY$.

Bài 24. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có $\angle A = 60^\circ$. Đường thẳng d qua O song song với BC cắt (O) tại hai điểm M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại X, Y. Chứng minh rằng (AXY) tiếp xúc với (BOC).

Bài 25. *(Baltic Way 2006)* Cho tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm AC, AB. Gọi P là giao điểm khác A của hai đường tròn (ABB_1) và (ACC_1). Đường thẳng AP cắt (AB_1C_1) lần thứ hai tại P_1. Chứng minh rằng $2AP = 3AP_1$.

Bài 26. *(Morocco MO 2015)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi T là giao của đường tròn (BOC) với đường tròn qua A, C và tiếp xúc với AB. OT cắt BC tại K. Chứng minh rằng AK tiếp xúc với (O).

Bài 27. *(Nguyễn Văn Linh)* Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm BC, K là hình chiếu của A trên BC. OK cắt AM tại G. Chứng minh rằng G nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (BOC) và đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bài 28. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các tâm bàng tiếp I_b, I_c. Một dây cung PQ của (O) song song với BC. AP cắt BC tại R. Chứng minh rằng $\angle I_bRI_c + \angle I_bQI_c = 180°$.

Bài 29. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là trung điểm BC. X là một điểm bất kì nằm trên AM. BX, CX lần lượt cắt AC, AB tại D, E. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACE. O_1O_2 giao DE tại P, (X, XA) giao (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$.

Bài 30. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đương tròn (O). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác FAB, FCD, EAD, EBC. Chứng minh rằng O, O_1, O_2, O_3, O_4 cùng thuộc một đường tròn.

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Linh, *Chuỗi bài toán về họ đường tròn đi qua điểm cố định*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2015/04/10/circles-pass-through-fixed-point/

[2] Nguyễn Văn Linh, *Đường tròn mixtilinear*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2013/11/23/mixtilinear-circles/

[3] Nguyễn Văn Linh, *Phép vị tự quay*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2015/10/20/spiral-similarity/

[4] Nguyễn Văn Linh, *Đường tròn tiếp xúc trong tứ giác ngoại tiếp*, Euclidean Geometry Blog.
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2014/08/27/tangent-circles-in-circumscribed-quadrilateral/

[5] AoPS topic *(AEF) passes through a fixed point on A-median.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h545085p4747697

[6] AoPS topic *Intersection of circumcircles of MNP and BOC.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h528741p3014518

[7] AoPS topic *RMM2011, P 3, Day 1 - Determine the locus as line varies.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h393650

[8] AoPS topic *Own invention.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1082074p4761696

[9] AoPS topic *MN goes through fixed point.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h619483p4988467

Email: *Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com*