

Dãy truy hồi tuyến tính – Phương pháp toán tử

Trương Phước Nhân, 21/08/2017

Một dãy số $s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ được gọi là truy hồi tuyến tính bậc k nếu tồn tại các hằng số

$$a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C} \text{ thỏa } s_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i s_{n+i} \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Vấn đề ở đây là xác định dạng của một dãy truy hồi tuyến tính. Để giải quyết vấn đề này ta sẽ tiến hành quy đổi bài toán trên dãy số và bài toán trên các toán tử tuyến tính như sau :

Đặt $I : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ sao cho $I(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ là toán tử đồng nhất;

$$E : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty \text{ sao cho } E(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots) \text{ là toán tử dịch chuyển}$$

thì ta có thể viết lại điều kiện của một dãy truy hồi dưới dạng $p(E)s = 0$, trong đó

$$p(E) = E^k - a_1 E^{k-1} - a_2 E^{k-2} - \dots - a_k I$$

Theo định lý cơ bản của đại số ta suy ra : $p(E) = (E - \lambda_1 I)(E - \lambda_2 I) \dots (E - \lambda_k I)$, trong đó $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$

Kết quả 1: Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ là các số phân biệt thì một dãy truy hồi s thỏa mãn $p(E)s = 0$ khi và chỉ khi tồn tại các số $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ thỏa $s_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n$

Chứng minh :

Do $p(E) : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ là một toán tử tuyến tính nên $\text{Ker}(p(E)) = \{s \mid p(E)s = 0\}$ là một không gian con.

$$\text{Đặt } e^{(i)} := (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^n, \dots).$$

Nhận thấy rằng khẳng định trong bài toán tương đương với việc hệ $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ là một cơ sở của không gian con $\text{Ker}(p(E))$.

Đầu tiên, ta cần chỉ ra rằng $e^{(i)} \in \text{Ker}(p(E))$.

$$\text{Thật vậy, } (Ee^{(i)})_n = e_{n+1}^{(i)} = \lambda_i^{n+1} = \lambda_i \lambda_i^n = \lambda_i e_n^{(i)}$$

nên $e^{(i)}$ là một vector riêng của E tương ứng với giá trị riêng λ_i , hay $(E - \lambda_i I)e^{(i)} = 0$.

Sử dụng tính giao hoán của vành các đa thức, ta có thể viết đa thức p dưới dạng $p(E) = q(E)(E - \lambda_i I)$ với một đa thức q nào đó.

$$\text{Khi đó, } p(E)e^{(i)} = q(E)(E - \lambda_i I)e^{(i)} = q(E)0 = 0, \text{ hay } e^{(i)} \in \text{Ker}(p(E))$$

Tiếp theo, ta cần chỉ ra rằng hệ $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, nhận thấy rằng không tồn tại một hệ thức tuyến tính giữa k số hạng đầu tiên của các dãy

$$e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}, \text{ bởi vì } \det(e_j^{(i)})_{i=1, j=0}^{k, k-1} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \text{ và } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ là các số phân biệt,}$$

nên $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ độc lập tuyến tính.

Sau cùng, để chứng minh hệ $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ là một cơ sở của không gian $\text{Ker}(p(E))$ ta cần chỉ ra rằng $\dim(\text{Ker}(p(E))) = k$.

Thật vậy, một dãy $s \in \text{Ker}(p(E))$ được xác định bởi k số hạng đầu tiên của dãy số đó, theo hệ thức truy hồi luôn tồn tại các số α_{ij} sao cho $s_j = \alpha_{0,j}s_0 + \alpha_{1,j}s_1 + \dots + \alpha_{k-1,j}s_{k-1}$ với $k \leq j < \infty$. Do đó bằng cách đặt

$$f_j^{(i)} = \delta_{ij} \text{ với } 1 \leq i, j \leq k \text{ và } f_j^{(i)} = \alpha_{ij} \text{ với } 1 \leq i \leq k \text{ và } k \leq j < \infty \text{ thì hệ } f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(k)} \text{ là một cơ sở của}$$

không gian $\text{Ker}(p(E))$. Theo lý thuyết đại số tuyến tính thì mọi cơ sở của không gian $\text{Ker}(p(E))$ đều có cùng lực lượng nên $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$ cũng là một cơ sở của không gian $\text{Ker}(p(E))$.

Để tiếp tục giải quyết phần còn lại của vấn đề ta sẽ cần đến khái niệm đạo hàm rời rạc

(ở đây ta sẽ chỉ nêu định nghĩa của đạo hàm rời rạc về mặt hình thức chứ không đi thiết lập định nghĩa đạo hàm rời rạc thông qua cấu trúc metric trên $\mathbb{C}^\infty$).

Đạo hàm rời rạc được định nghĩa là toán tử $D := E - I$

Kết quả 2: $D^m s = 0$ khi và chỉ khi $s_n = q(n)$ với q là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $m-1$.

Chứng minh:

Nhận thấy khẳng định trong bài toán tương đương với việc ta chứng minh rằng các vector $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(m-1)}$ lập thành một cơ sở của $\text{Ker}(D^m)$, trong đó $e^{(i)} := (1, 2^i, 3^i, \dots, n^i, \dots)$.

Đầu tiên, bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chỉ ra rằng $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(m-1)} \in \text{Ker}(D^m)$.

Thật vậy, với $m=1$ thì khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử khẳng định bài toán đã được kiểm chứng với giá trị $m-1$, nghĩa là $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(m-2)} \in \text{Ker}(D^{m-1})$.

Bằng việc sử dụng giả thiết quy nạp và một số tính toán nhỏ ta được:

$$D^m[e^{(i)}] = D[D^{m-1}[e^{(i)}]] = D[0] = 0 \text{ với } 0 \leq i \leq m-2$$

Phần việc còn lại của ta là chứng minh $D^m[e^{(m-1)}] = 0$. Để thực hiện được nhiệm vụ này đầu tiên ta cần tìm một biểu diễn cho $D[e^{(m-1)}]$:

$$\begin{aligned} D[e^{(m-1)}]_n &= (E - I)e_n^{m-1} \\ &= (n+1)^{m-1} - n^{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} n^k - n^{m-1} \text{ (sử dụng khai triển nhị thức)} \\ &= \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} n^k \end{aligned}$$

$$\text{hay } D[e^{(m-1)}] = \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} e^{(k)}$$

Áp dụng biểu diễn vừa tìm được ta thực hiện tính $D^m[e^{(m-1)}]$:

$$\begin{aligned} D^m[e^{(m-1)}] &= D^{m-1}[D[e^{(m-1)}]] \\ &= D^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} e^{(k)}\right] \\ &= 0 \text{ (sử dụng tính tuyến tính của toán tử } D^{m-1} \text{ và giả thiết quy nạp)} \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(m-1)}$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, nếu $e^{(0)}, e^{(1)}, \dots, e^{(m-1)}$ là phụ thuộc tuyến tính thì ta tìm được các số a_i không đồng thời bằng 0 với

$0 \leq i \leq m-1$ sao cho $\sum_{i=0}^{m-1} a_i n^i = 0$ với mọi n . Tuy nhiên, theo định lý cơ bản của đại số thì một đa thức có

bậc hữu hạn nhưng có vô số nghiệm khi và chỉ khi các hệ số đều đồng nhất bằng 0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết các số a_i không đồng thời bằng 0.

Sau cùng, theo chứng minh trong kết quả 1) ta nhận thấy rằng $\dim(\text{Ker}(D^m)) = m$, bởi vì một dãy thỏa mãn hệ thức truy hồi bậc m được xác định duy nhất bởi m số hạng đầu của dãy như ta đã chỉ ra ở trên.

Vận dụng phương pháp lập luận ta đã sử dụng trong kết quả 1) và 2) ta có thể chỉ ra được rằng:

Kết quả 3: Giả sử dãy s thỏa mãn hệ thức truy hồi $p(E)s = 0$.

Nếu $p(E) = \prod_{i=1}^k (E - \lambda_i I)^{m_i}$ thì $s_n = q_1(n)\lambda_1^n + q_2(n)\lambda_2^n + \dots + q_k(n)\lambda_k^n$, trong đó q_i là một đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $m_i - 1$

Tài liệu tham khảo:

Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine, 15/02/2011

