

Phương pháp topo - metric trong lý thuyết đồ thị

Trương Phước Nhân, 22/08/2017

Bài toán 1: Với mọi phép phủ S^n bởi $n+1$ tập mở hoặc $n+1$ tập đóng, có nghĩa là $S^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ sao cho tất cả các tập $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ là mở hoặc tất cả đều đóng, thì ta luôn tìm được một tập A_i chứa hai điểm đối cực, có nghĩa là cặp điểm $\{x, -x\}$ (S^n là mặt cầu đơn vị n -chiều)

Chứng minh:

Xét ánh xạ liên tục $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ với $f(x) = (\text{dist}(x, A_1), \text{dist}(x, A_2), \dots, \text{dist}(x, A_n))$ trong đó

$\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$ là khoảng từ điểm x đến tập A . Áp dụng định lý Borsuk – Ulam trong lý thuyết

topo: “Nếu $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục thì ta tìm được $x \in S^n$ sao cho $f(x) = f(-x)$ ”, được một điểm $x \in S^n$ sao cho $f(x) = f(-x)$, có nghĩa là $\text{dist}(x, A_k) = \text{dist}(-x, A_k)$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$.

Trường hợp 1: $\text{dist}(x, A_k) \neq 0$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Ta suy ra ngay $x \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ hay $x \in A_{n+1}$.

Sử dụng điều kiện $\text{dist}(x, A_k) = \text{dist}(-x, A_k)$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ ta cũng suy ra $-x \notin A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ hay $-x \in A_{n+1}$.

Trường hợp 2: $\text{dist}(x, A_i) = 0$ với một chỉ số $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Từ điều kiện $\text{dist}(x, A_k) = \text{dist}(-x, A_k)$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$ ta suy ra $\text{dist}(-x, A_i) = 0$.

Nếu tất cả các tập $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ đều đóng thì A_i là tập đóng. Điều kiện $\text{dist}(x, A_i) = 0$ tương đương với việc $x \in A_i$. Tương tự ta cũng thu được $-x \in A_i$.

Nếu tất cả các tập $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ đều mở thì điều kiện $\text{dist}(x, A_i) = 0$ ta suy ra tồn tại một dãy điểm $(x_n) \subset A_i$ sao cho $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Giả sử tập A_i không chứa cặp điểm đối cực, khi đó $(-x_n) \subset S^n / A_i$ hay $-x \in \overline{S^n / A_i}$. Kết hợp với điều kiện $\text{dist}(-x, A_i) = 0$ ta suy ra $-x \in \overline{A_i}$ nên $-x \in \partial A_i = \overline{A_i} \cap \overline{S^n / A_i}$. Do $A_i \subset S^n$ nên ta dễ dàng chứng minh được $\partial A_i = A_i$ nên sau cùng ta nhận được $-x \in A_i$. Lập luận tương tự ta cũng suy ra được $x \in A_i$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết phản chứng. Do đó ta tìm được một điểm y sao cho $y, -y \in A_i$.

Bài toán 2: Với mọi số nguyên dương n ta luôn chỉ ra được một đồ thị vô hạn triangle – free sao cho không thể tô màu thực sự các đỉnh của đồ thị bởi $n+1$ màu.

Chứng minh: Ta xây dựng một đồ thị vô hạn G thỏa mãn yêu cầu bài toán (đồ thị vô hạn được hiểu theo nghĩa là nó có vô hạn các đỉnh). Đặt $V(G) = S^n$ và ta nối điểm x với điểm y nếu và chỉ nếu góc giữa hai

vector x và y lớn hơn 120° , hay nói cách khác $\langle x, y \rangle < -\frac{1}{2}$.

Khẳng định 1: Đồ thị G là triangle – free

Thật vậy, do $\langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, x \rangle = \frac{\|x+y+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2}{2} = \frac{\|x+y+z\|^2 - 3}{2} \geq -\frac{3}{2}$ nên có ít nhất một

trong ba số hạng $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle z, x \rangle$ phải có giá trị $\geq -\frac{1}{2}$, hay nói cách khác không tồn tại một tam giác xyz .

Khẳng định 2: Đồ thị G không thể tô màu thực sự bởi $n+1$ màu

Thật vậy, ta không thể tô màu thực sự các đỉnh của đồ thị G bởi $n+1$ màu, nếu ngược lại ta có thể chỉ ra được các tập $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ sao cho $S^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k$ và không có hai đỉnh nào trong cùng một tập A_k có cạnh nối

với nhau. Khi đó: $S^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}$.

Sử dụng kết quả của bài toán 1) ta tìm được một tập $\overline{A_i}$ chứa một cặp điểm đối cực $\{-x, x\}$. Theo lý thuyết metric ta tìm được hai dãy điểm $(y_n), (z_n) \subset A_i$ sao cho $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, -x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Theo giả thiết ta suy ra

$\langle y_n, z_n \rangle \geq -\frac{1}{2}$ với $n=1,2,3,\dots$ Chuyển qua giới hạn ta thu được $\langle x, -x \rangle \geq -\frac{1}{2}$, điều này mâu thuẫn với việc $\|x\|=1$.

Bài toán 3: Với mọi số nguyên dương n ta luôn chỉ ra được một đồ thị hữu hạn triangle – free sao cho không thể tô màu thực sự các đỉnh của đồ thị bởi $n+1$ màu.

Chứng minh :

Với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta gọi Δ là một ε – lưới hữu hạn của S^n , có nghĩa là với mọi $x \in S^n$ ta luôn chỉ ra được một phần tử $a \in \Delta$ sao cho $\|x-a\| < \varepsilon$, lưu ý rằng một ε – lưới như vậy luôn tồn tại do tính compact của S^n .

Ta xây dựng đồ thị G' như sau : Đặt $V(G') = \Delta$ và ta nối hai đỉnh $a, b \in \Delta$ bằng một cạnh nếu và chỉ nếu

$$\langle a, b \rangle < -\frac{2}{3}.$$

Khẳng định 1: Đồ thị G' là triangle -free .

Thật vậy, bằng cách sử dụng hệ thức $\langle a, b \rangle + \langle b, c \rangle + \langle c, a \rangle = \frac{\|a+b+c\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 - \|c\|^2}{2} = -\frac{3(1+\varepsilon)^2}{2} \geq -2$

(bất đẳng thức xảy ra với ε đủ nhỏ, cụ thể là $0 < \varepsilon \leq \sqrt{\frac{4}{3}} - 1$) ta suy ra ít nhất một trong ba số hạng

$$\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle \text{ phải lớn hơn hoặc bằng } -\frac{2}{3}.$$

Khẳng định 2: Đồ thị G' không thể tô màu thực sự bởi $n+1$ màu.

Giả sử phản chứng , khi đó ta có thể chỉ ra được các tập $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ sao cho $\Delta = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n+1}$ trong đó không có hai đỉnh nào trong cùng một tập B_k có cạnh nối với nhau.

$$\text{Đặt } A_k = \{x \in S^n \mid \exists a \in B_k; \|x-a\| < \varepsilon\} \text{ với } k=1,2,\dots, n+1 \text{ ta suy ra } S^n = \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k.$$

Sử dụng kết quả của bài toán 1) ta tìm được một tập $\overline{A}_k$ chứa một cặp điểm đối cực $\{-x, x\}$. Theo cách ta

định nghĩa tập A_k thì $A_k \subset \bigcup_{a \in B_k} B(a, \varepsilon) \Rightarrow \overline{A}_k \subset \bigcup_{a \in B_k} \overline{B(a, \varepsilon)}$ nên tồn tại $a, b \in B_k$ sao cho $\|-x-a\| \leq \varepsilon$ và

$$\|x-b\| \leq \varepsilon \text{ nên bằng cách áp dụng bất đẳng thức tam giác } \|a+b\| \leq \|x-a\| + \|-x-b\| \leq 2\varepsilon.$$

Bằng tính toán trực tiếp : $\|a+b\| \leq 2\varepsilon \Leftrightarrow \|a+b\|^2 \leq 4\varepsilon^2 \Leftrightarrow \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle \leq 4\varepsilon^2$.

Kết hợp với các hệ thức $1-\varepsilon < \|a\|, \|b\|$ (suy ra từ sự kiện $\|-x-a\| \leq \varepsilon$ và $\|x-b\| \leq \varepsilon$, lưu ý $x \in S^n$) ta suy ra

$$\langle a, b \rangle < \frac{4\varepsilon^2 - 2(1-\varepsilon)^2}{2}.$$

Do đó với ε đủ nhỏ ta sẽ có $\langle a, b \rangle < -\frac{2}{3}$ (do $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{4\varepsilon^2 - 2(1-\varepsilon)^2}{2} = -1$ và $-1 < -\frac{2}{3}$), điều này mâu thuẫn với giả thiết không có hai đỉnh nào trong cùng một tập B_k có cạnh nối với nhau.

Tài liệu tham khảo :

Timothy Gowers, Topic in Combinatorics .