

Nghịch đảo Mobius

Trương Phước Nhân, 08/09/2017

$$\text{Hàm Mobius } \mu(d) = \begin{cases} (-1)^r & \text{nếu } d = p_1 p_2 \dots p_r \text{ với } p_i \text{ phân biệt} \\ 1 & \text{nếu } d = 1 \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

$$\text{Kết quả 1: } \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n > 1 \end{cases}$$

Chứng minh :

Với $n = 1$, do 1 chỉ có một ước duy nhất là 1 nên $\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$

Với $n > 1$, số nguyên n có dạng $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ với p_i là các số nguyên tố phân biệt.

$$\text{Khi đó : } \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} \mu(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_r}) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} = 0$$

$$\text{Kết quả 2: Nếu các ánh xạ } f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \text{ thỏa mãn } f(n) = \sum_{d|n} g(d) \text{ thì } g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Chứng minh :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \\ &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{d'|d} g(d') \\ &= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{d: d'|d \text{ và } d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{m|\frac{n}{d'}} \mu(m) \end{aligned}$$

Sử dụng kết quả 1) ta suy ra $\sum_{m|\frac{n}{d'}} \mu(m) = 0$ tại hầu hết các ước d' ngoại trừ $d' = n$, $\sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = g(n)$

$$\text{Kết quả 3: Nếu các ánh xạ } f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \text{ thỏa mãn } f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \text{ thì } g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Chứng minh :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} \sum_{d'|d} \mu(d') g\left(\frac{d}{d'}\right) \\ &= \sum_{d|n} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) g(d') \\ &= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{d: d'|d \text{ và } d|n} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) \\ &= \sum_{d'|n} g(d') \sum_{m|\frac{n}{d'}} \mu(m) \end{aligned}$$

Sử dụng kết quả 1) ta suy ra $\sum_{m|\frac{n}{d'}} \mu(m) = 0$ tại hầu hết các ước d' ngoại trừ $d' = n$, $\sum_{d|n} f(d) = g(n)$

$$\text{Kết quả 4: } n = \sum_{d|n} \phi(d), \text{ trong đó } \phi \text{ là phi hàm Euler.}$$

Chứng minh : Ta đã chứng minh được rằng $\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ với $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$

Thực hiện khai triển vế phải của biểu thức tính $\phi(n)$ và sử dụng định nghĩa của hàm số Mobius :

$$\phi(n) = n - \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots + (-1)^m \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_m} = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

Áp dụng kết quả 3) ta suy ra được rằng: $n = \sum_{d|n} \phi(d)$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine , 15/02/2011

[2]. Melvyn B. Nathanson, Additive Number Theory – Inverse Problems and the Geometry of Sumsets ,First Edition.

[3]. Trương Phước Nhân, Phi hàm Euler, 07/09/2017