Bài 1

12th January 2018 at 9:58pm

VMO 2018

Đề bài: Cho dãy số (x_n) xác định bởi công thức truy hồi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$ với mọi $n \geq 1$.

1. Chứng minh rằng dãy đã cho hội tụ và tính giới hạn.

2. Chứng minh rằng $n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n + 1$ với mọi $n \geq 1$.

Lời giải: Từ các điều kiện của bài toán dễ dàng đoán ngay giới hạn của dãy là 1. Từ đó ý tưởng là đặt dãy $y_n = x_n - 1$. Ta cần chứng minh dãy này có giới hạn là 0 và với mọi $n \geq 0$ thì
$0 \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq 1$.

Ta có $x_{n+1} - 1 = \sqrt{x_n + 8} - 3 - (\sqrt{x_n + 3} - 2) = \frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n + 8} + 3} - \frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n + 3} + 2}$

nên công thức truy hồi của y_n là $y_1 = 1$ và $y_{n+1} = y_n \left(\frac{1}{\sqrt{y_n + 9} + 3} - \frac{1}{\sqrt{y_n + 4} + 2} \right)$ với mọi $n \geq 1$.

Dễ thấy $\left| \frac{1}{\sqrt{y_n + 9} + 3} - \frac{1}{\sqrt{y_n + 4} + 2} \right| \leq \frac{1}{2}$. Nên ta có $|y_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |y_n|$ với mọi $n \geq 1$. Do đó dãy $|y_n|$ có giới hạn là 0. Hệ quả là giới hạn của x_n là 1 □

Từ $\frac{1}{\sqrt{y_n + 9} + 3} - \frac{1}{\sqrt{y_n + 4} + 2} < 0$ trên thì ta có y_n luôn phiên đổi dấu. Mà $y_1 = 1 > 0$ nên $y_k \geq 0$ với k lẻ và $y_k \leq 0$ với k chẵn. Lại có $|y_{k+1}| \leq |y_k|$ nên ta có $y_{2t+1} \leq -y_{2t} \leq y_{2t-1}$ với mọi $t \geq 1$. Hay
$y_{2t} + y_{2t-1} \geq 0$ và $y_{2t} + y_{2t+1} \leq 0$ với mọi $t \geq 1$.

Dó với mọi k thì

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k} = (y_1 + y_2) + \cdots + (y_{2k-1} + y_{2k}) \geq 0$$

. Vì $y_{2k+1} \geq 0$ nên cũng phải có $y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k+1} \geq 0$.

Tương tự $y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k-1} = y_1 + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{2k-2} + y_{2k-1}) + y_{2k} \leq 1$. Vì $y_{2k} \leq 0$ nên cũng phải có $y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k} \leq 1$

■

Bài 5

12th January 2018 at 9:59pm

Đề bài: Cho các số nguyên dương n và d. Xét tập hợp $S_n(d)$ gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(x_1, ..., x_d)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $x_i \in \{1, ..., n\}$ với mọi $1 \leq i \leq d$
2. $x_i \neq x_{i+1}$ với mọi $1 \leq i \leq d - 1$
3. Không tồn tại các chỉ số $1 \leq i < j < k < l \leq d$ sao cho $x_i = x_k$ và $x_j = x_l$.

a. Tính số phần tử của tập $S_3(5)$.

b. Chứng minh rằng tập hợp $S_n(d)$ khác rỗng khi và chỉ khi $d \leq 2n-1$.

Lời giải:

a. Dễ thấy vai trò của $1, 2, 3$ là như nhau nên có thể giả sử $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Xét hai trường hợp, $x_3 = 1$ và $x_3 = 3$.

Nếu $x_3 = 1$ thì từ điều kiện 2. ta có x_4, x_5 đều khác 2. Mà x_4 phải khác 1 nên $x_4 = 3$. Do đó $x_5 = 1$. Dãy $1, 2, 1, 3, 1$ thỏa mãn cả hai điều kiện.

Nếu $x_3 = 3$ thì $x_4 = 1$ hoặc 2. Nếu $x_4 = 1$ thì x_5 không thể là 1 (điều kiện 1), hay 2 và 3 (điều kiện 2). Do đó $x_4 = 2$, khi đó dễ thấy chỉ còn có $x_5 = 1$. Ta thu được dãy $1, 2, 3, 2, 1$.

Vậy tổng cộng sẽ có $S_3(5) = 3! \times 2 = 12$ dãy thỏa mãn.

b. Ta chứng minh bằng quy nạp với mỗi n thì mọi dãy có độ dài $2n$ bất kì đều không thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện của bài toán bằng quy nạp.

Thật vậy với $n = 1$ thì dãy có độ dài 2 sẽ phạm vào điều kiện 1. Giả sử đã đúng tới $n-1 \geq 1$. Xét với n. Giả sử tồn tại dãy $x_1, ..., x_{2n}$ thỏa mãn các điều kiện đề bài. Nếu có số a chỉ xuất hiện 1 lần trong dãy, thì khi bỏ phần tử a đi, thì ta có dãy mới gồm $2n-1$ phần tử và vẫn thỏa mãn điều kiện. Nhưng điều này mâu thuẫn với giải thiết quy nạp. Vậy mỗi số nếu xuất hiện trong dãy thì sẽ xuất hiện 2 lân. Do đó mỗi $1 \leq i \leq n$ sẽ có hai chỉ số $t_i < l_i$ mà $x_{t_i} = x_{l_i} = i$. Không mất tính tổng quát, giả sử $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ thì theo điều kiện 2, phải có $l_1 > l_2 > \cdots > l_n > t_n$. Nhưng khi đó thì sẽ phải có $t_n = n$, $l_n = n+1$ và điều này mâu thuẫn với điều kiện 1. Vậy không có dãy nào có độ dài $2n$ nào thỏa mãn cả hai điều kiện. ĐPCM.

Với $d = 2n-1$ thì dễ thấy dãy $1, 2, ..., n-1, n, n-1, .., 1$ thỏa mãn. Và hiển nhiên nếu dãy độ dài d thỏa mãn thì chỉ cần bỏ đi một phần tử bất kì, ta thu được dãy có độ dài $d-1$ thỏa mãn. Câu b. được chứng minh hoàn toàn.

Bài 6

12th January 2018 at 8:27pm

VMO 2018

Đề bài: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 2, x_1 = 1$ và $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ với mọi $n \geq 0$.

a. Với $n \geq 1$, chứng minh rằng nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ. b. TÌm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) sao cho x_n chia hết cho x_m.

Lời giải:

Gọi dãy Fibonacci như sau: $F_{-2} = 1, F_{-1} = 0, F_0 = 1, F_1 = 1$ và $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n \geq 0$.

Ta gọi một dãy x_n có tính "Fibo" nếu nó thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Bổ đề 1: Ta có tính chất sau cho dãy "Fibo":

$a_m = F_k a_{m-k} + F_{k-1} a_{m-k-1}$.

Chứng minh:

Thật vậy $a_m = a_{m-1} + a_{m-2} = F_1 a_{m-1} + F_0 a_{m-2}$. Nên điều trên đúng với $k = 1$. Giả sử đã đúng tới k. Tức $a_m = F_k a_{m-k} + F_{k-1} a_{m-k-1}$, thì có

$a_m = F_k(a_{m-k-1} + a_{m-k-2}) + F_{k-1} a_{m-k-1}$

$= (F_k + F_{k-1}) a_{m-k-1} + F_k a_{m-k-2}$

$= F_{k+1} a_{m-k-1} + F_k a_{m-k-2}$ □.

Ta có $x_0 = 2 = F_0 + F_{-2}$, $x_1 = 1 = F_1 + F_{-1}$, nên dễ thấy $x_n = F_n + F_{n-2}$.

Bổ đề 2: Với mọi $n \geq 2$ thì $x_n | F_{2n-1}$ và $\gcd(x_n, F_{2n}) = 1$.

Chứng minh: Ta có dãy Fibonacci có tính chất "Fibo" nên theo bổ đề 1 ta có

$F_{2n-1} = F_n F_{n-1} + F_{n-1} F_{n-2} = (F_n + F_{n-2}) F_{n-1} = x_n F_{n-1}$, do đó $a_n | F_{2n-1}$ với mọi n.

Lại dễ thấy $\gcd(F_k, F_{k-1}) = \gcd(F_{k-1}, F_{k-2}) = ... = \gcd(F_1, F0) = 1$ với mọi $k \geq 0$ nên hệ quả là $\gcd(F_{2n}, F_{2n-1}) = 1$. Mà $x_n | F_{2n-1}$ và với $n \geq 2$ thì $x_n \geq 2$ nên phải có $\gcd(x_n, F_{2n}) = 1$ □

Xét số $m \neq 2$. Dãy x_k tăng ngặt với $k \geq 2$ nên $x_k < x_m$ với mọi $0 \leq k < m$. Do đó x_n không chia hết cho x_m với mọi $m < n$.

Với $m < n \leq 2m$ thì theo bổ đề 1 ta có

$x_n = F_{n-m} x_m + F_{n-m-1} x_{m-1}$, có $\gcd(x_m, x_{m-1}) = 1$ nên ta có nếu x_m chia hết cho x_m thì phải có F_{n-m-1} chia hết cho x_m. Tuy nhiên $0 < F_{n-m-1} \leq F_{n-1} < x_n$ nên điều này không xảy ra. Vậy x_n không chia hết cho x_m với mọi $m < n \leq 2m$.

Xét với $n > 2m$ ta có

$x_n = F_{2m} x_{n-2m} + F_{2m-1} x_{n-2m-1}$

Theo bổ đề 2 thì F_{2m-1} chia hết cho x_m và $\gcd(F_{2m}, x_m) = 1$ nên x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi x_{n-2m} chia hết cho x_m. Đặt $n = 2mt + r$ với $0 \leq r < 2m$ thì dễ dàng có x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi x_r chia hết cho x_m. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $r = m$ hay $n = (2t + 1)m$.

Vậy với mọi $m \geq 2$ thì x_n chia hết cho x_m khi và chỉ khi $n = (2t + 1)m$.

Xét $m = 1$ thì $x_m = 1$ nên x_n chia hết cho x_m với mọi n.

Xét $m = 0$ thì khi xét module 2 thì dễ tuần với với chu kì là 3 là $0, 1, 1$. Do đó x_n chia hết cho x_0 khi và chỉ khi $n = 3t$.

Vậy đáp số của câu b. là $(m, n) = (1, t)$ hoặc $(0, 3t)$ hoặc $(a, (2t + 1)a)$ với mọi t, a□

Trở lại câu a. Giả sử n là hợp số và có ước nguyên tố lẻ p. Theo trên ta có x_n chia hết cho $x_{n/p}$ và $x_n > x_{n/p}$ nên x_n không thể là số nguyên tố. Do đó nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ □.