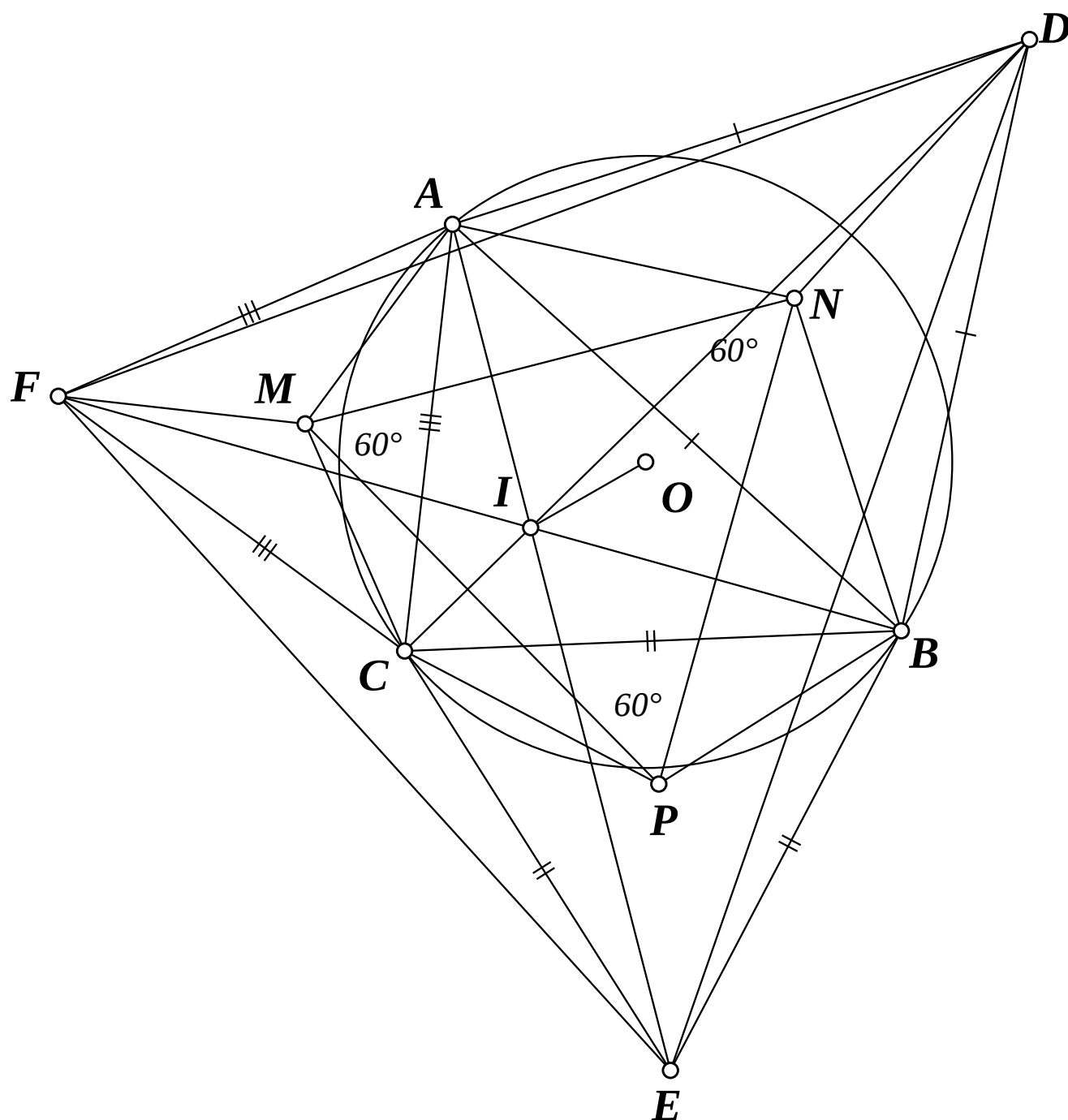


# Tạp chí Apollonius

No.2



Biên soạn và sưu tầm: Nguyễn Đăng Khoa, Lê Trung Hiếu – THCS Lâm Thao – Lâm Thao – Phú Thọ

# PROBLEMS

## I, Đại số & Số học

Bài 1: Giải phương trình

$$\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5$$

Bài 2: Cho các số thực  $x, y, z > 2$  và thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh rằng:  $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$

Bài 3: Cho  $x, y$  là các số nguyên khác 1 thỏa mãn  $\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$  là số nguyên. Chứng minh rằng:  $x^2y^2 - 1 : x+1$

Bài 4:

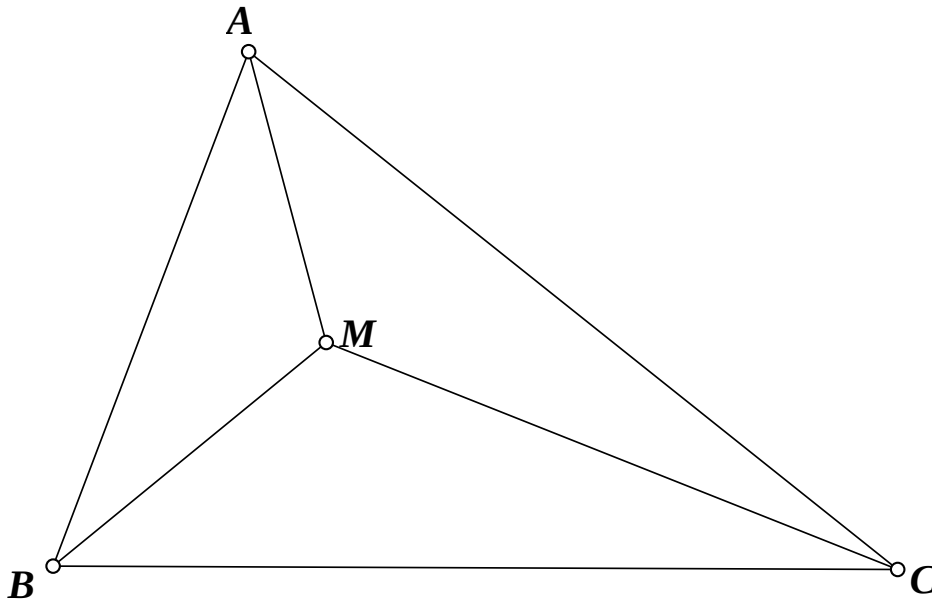
a, Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{2}$  không biểu diễn được dưới dạng  $p + q\sqrt{r}$  trong đó  $p, q, r$  là các số hữu tỷ,  $r > 0$

b, Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $a + \sqrt[3]{2}b + \sqrt[3]{4}c = 0$

Chứng minh rằng  $a=b=c=0$

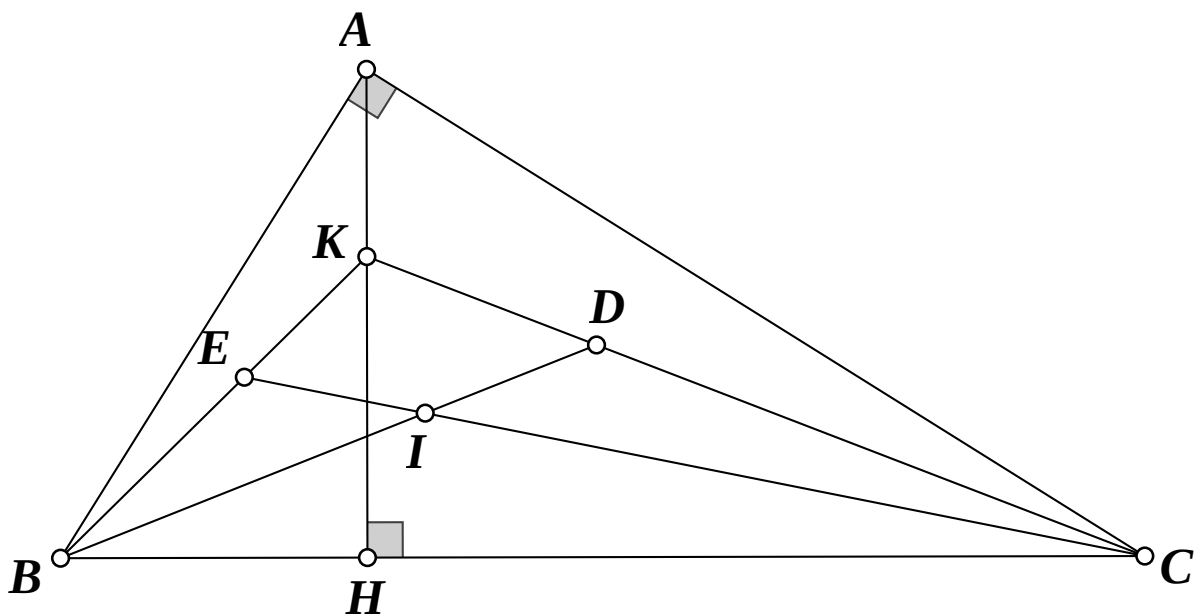
## II, Hình học

Bài 1: Cho tam giác nhọn  $ABC$ , lấy  $M$  bất kì trong tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:  $MA \cdot \sin A$ ;  $MB \cdot \sin B$ ;  $MC \cdot \sin C$  là độ dài 3 cạnh tam giác.

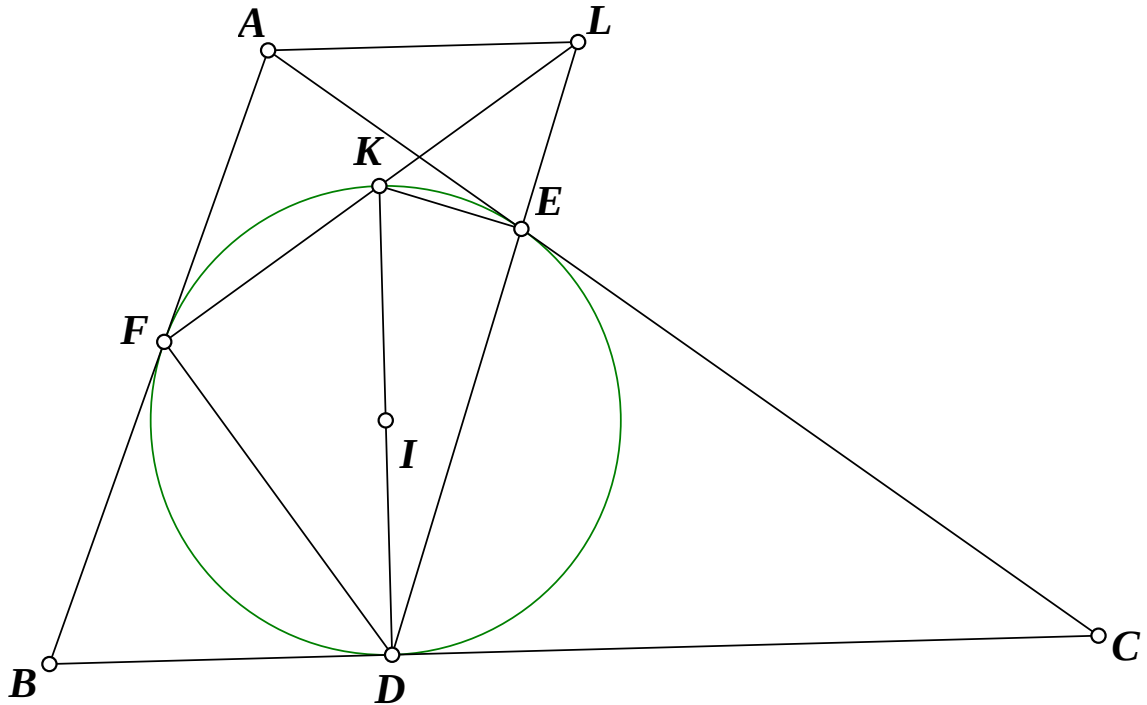


Bài 2: Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Lấy  $K$  bất kì trên cạnh  $AH$ . Lấy  $D, E$  thuộc cạnh  $CK$  và  $BK$  sao cho  $BD=BA$ ;  $CE=CA$ .  $CE$  cắt  $BD$  tại  $I$ . Chứng minh rằng  $IE=ID$

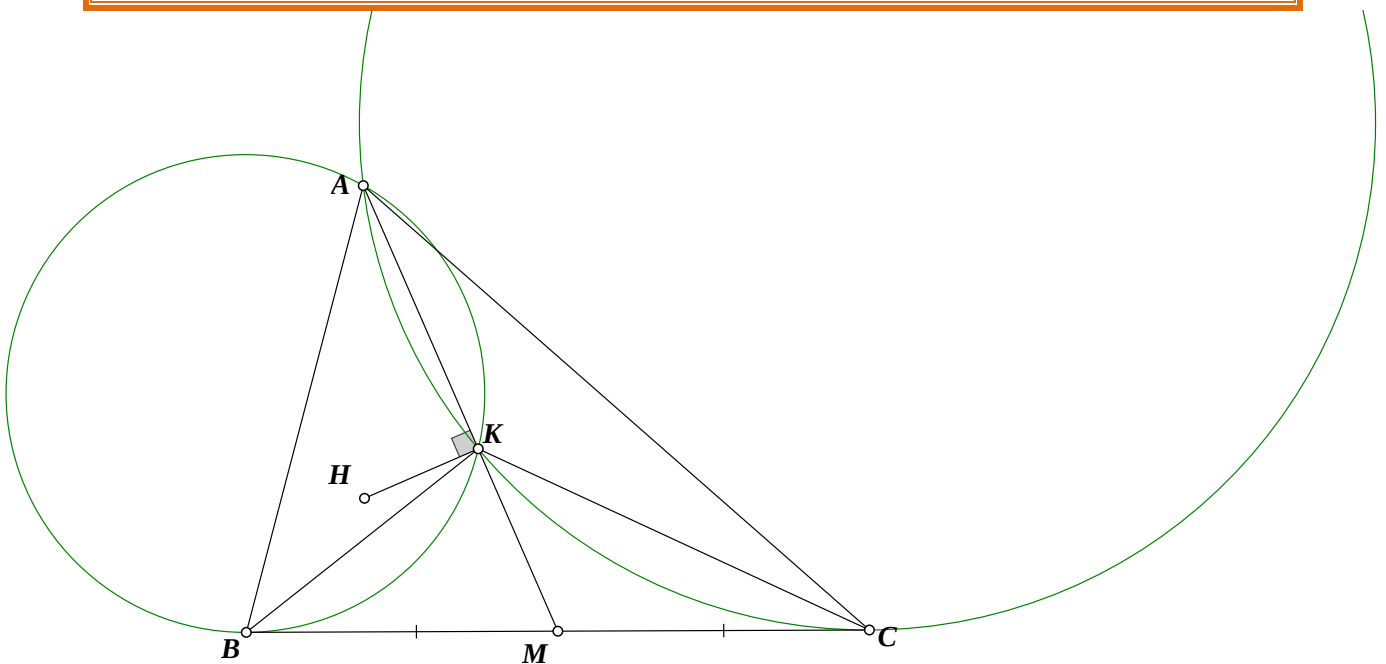
~IMO 2012~



**Bài 3:** Cho tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  tại  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Kẻ đường kính  $DK$  của  $(I)$ .  $FK$  cắt  $DE$  tại  $L$ . Chứng minh:  $AL$  song song với  $BC$



**Bài 4:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$  và trung tuyến  $AM$ . Kẻ  $HK$  vuông góc với  $AM$ . Chứng minh rằng  $BC$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AKB$  và  $AKC$



SOLUTIONS

I, Đại số & Số học

Bài 1: Giải phương trình

$$\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5$$

Lời giải

Điều kiện  $x \geq 5$

Đặt  $\sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = t (t \geq 0)$

Suy ra  $\sqrt{x - \sqrt{x - t}} = 5$

Nếu  $t > 5$  thì

$$\sqrt{x - \sqrt{x - t}} < \sqrt{x - \sqrt{x - 5}} = t$$

$$\Leftrightarrow 5 < t$$

Điều này vô lý. Chứng minh tương tự với  $t < 5$

Vậy  $t = 5$ . Từ đó suy ra  $x = 30$

\*) Bài toán tổng quát

Giải phương trình sau

$$\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \dots \sqrt{x - m}}}} = m$$

Trong đó có  $n$  dấu căn ( $n$  chẵn) và  $m > 0$

Thì ta đặt  $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \dots \sqrt{x - m}}}} = t$  (có  $n/2$  dấu căn)

Và làm tương tự như trên.

Bài 2: Cho các số thực  $x, y, z > 2$  và thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ . Chứng minh rằng:  $(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1$

Lời giải

Đặt  $x-2=a; y-2=b; z-2=c$  ( $a, b, c > 0$ )

Ta có:

$$\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{b+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{c+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+2} = \frac{b}{2(b+2)} + \frac{c}{2(c+2)} \geq \sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{b+2} \geq \sqrt{\frac{ac}{(a+2)(c+2)}}; \frac{1}{c+2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}}$$

Nhân cả 3 BĐT ta có:  $abc \leq 1$

Nhận xét: Đây là bài toán sáng tác từ bài toán quen thuộc sau

Cho  $x, y, z$  dương thỏa mãn  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2$ .

Chúng minh:  $xyz \leq \frac{1}{8}$

Bài 3: Cho  $x, y$  là các số nguyên khác -1 thỏa mãn  $\frac{x^2-1}{y+1} + \frac{y^2-1}{x+1}$  là số nguyên. Chứng minh rằng:  $x^2y^2 - 1 \vdots x+1$

Lời giải

Đặt  $\frac{x^2-1}{y+1} = \frac{a}{b}; \frac{y^2-1}{x+1} = \frac{c}{d}; (a,b)=1, (c,d)=1$  và  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Z} \Rightarrow ad+bc \vdots d \Leftrightarrow bc \vdots d$$

Vì  $(c,d)=1$  suy ra  $b \vdots d$  (1)

Ta có:

$$\frac{ac}{bd} = \frac{x^2-1}{y+1} \cdot \frac{y^2-1}{x+1} = (x-1)(y-1) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ac \vdots b \Rightarrow c \vdots b(2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $c \vdots d \Rightarrow d=1 \Rightarrow \frac{y^2-1}{x+1} = c \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow y^2 - 1 \vdots x+1$

Mặt khác ta có:

$$x^2y^2 - 1 = (x^2 - 1).y^2 + y^2 - 1 : x + 1$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4:

a, Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{2}$  không biểu diễn được dưới dạng  $p + q\sqrt{r}$  trong đó p, q, r là các số hữu tỷ,  $r > 0$

b, Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  thỏa mãn  $a + \sqrt[3]{2}b + \sqrt[3]{4}c = 0$

Chứng minh rằng  $a=b=c=0$

Lời giải

a, Giả sử  $\sqrt[3]{2}$  biểu diễn được dưới dạng  $p + q\sqrt{r}$  trong đó p, q, r là các số hữu tỷ,  $r > 0$  thì ta có:

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$$

$$\Leftrightarrow 2 = p^3 + q^2r\sqrt{r} + 3p^2q\sqrt{r} + 3pq^2r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r}(q^2r + 3p^2q) = 2 - p^3 - 3pq^2r$$

Nếu  $q^2r + 3p^2q = 0$

$$q^2r + 3p^2q = 0$$

$$\Leftrightarrow q(qr + 3p^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 0 \Rightarrow p = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q} \\ q = p = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 0 \end{cases}$$

Điều này là vô lý

Nếu  $q^2r + 3p^2q \neq 0$  thì VT =  $\sqrt{r}(q^2r + 3p^2q)$  là số vô tỷ còn VP là số hữu tỷ. Điều này cũng vô lý

Vậy suy ra điều phải chứng minh

b, Nếu  $abc=0$  thì dễ dàng chứng minh được  $a=b=c=0$

Nếu  $abc \neq 0$

Đặt  $\sqrt[3]{2} = t$ . Ta có:

$$ct^2 + bt + a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = -\frac{b}{2c} - \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - 4ac} = p - q\sqrt{r} \\ t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = -\frac{b}{2c} + \frac{1}{2c} \sqrt{b^2 - 4ac} = p + q\sqrt{r} \end{cases}$$

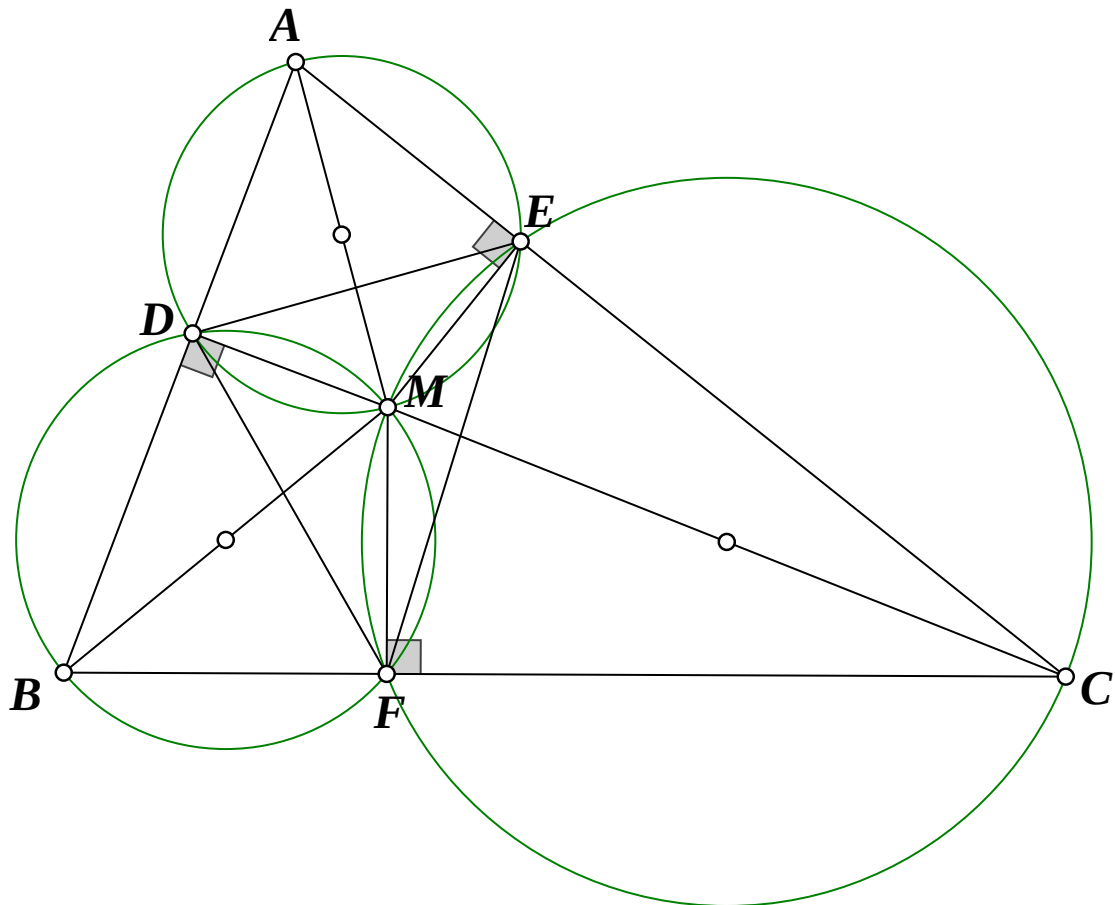
Theo phần a thì điều này vô lý

Vậy  $a=b=c=0$

## II, Hình học

**Bài 1:** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , lấy  $M$  bất kì trong tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:  $MA \cdot \sin A$ ;  $MB \cdot \sin B$ ;  $MC \cdot \sin C$  là độ dài 3 cạnh tam giác.

Lời giải



Gọi  $D, E, F$  là chân đường cao hạ từ  $M$  xuống  $AB, AC, BC$

Ta có tứ giác  $AEMD, EMFC, MDBF$  nội tiếp

Áp dụng công thức sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Ta có:

$$MA \cdot \sin A = DE; MB \cdot \sin B = DF; MC \cdot \sin C = EF$$

Mà  $DE, EF, FD$  là độ dài 3 cạnh tam giác

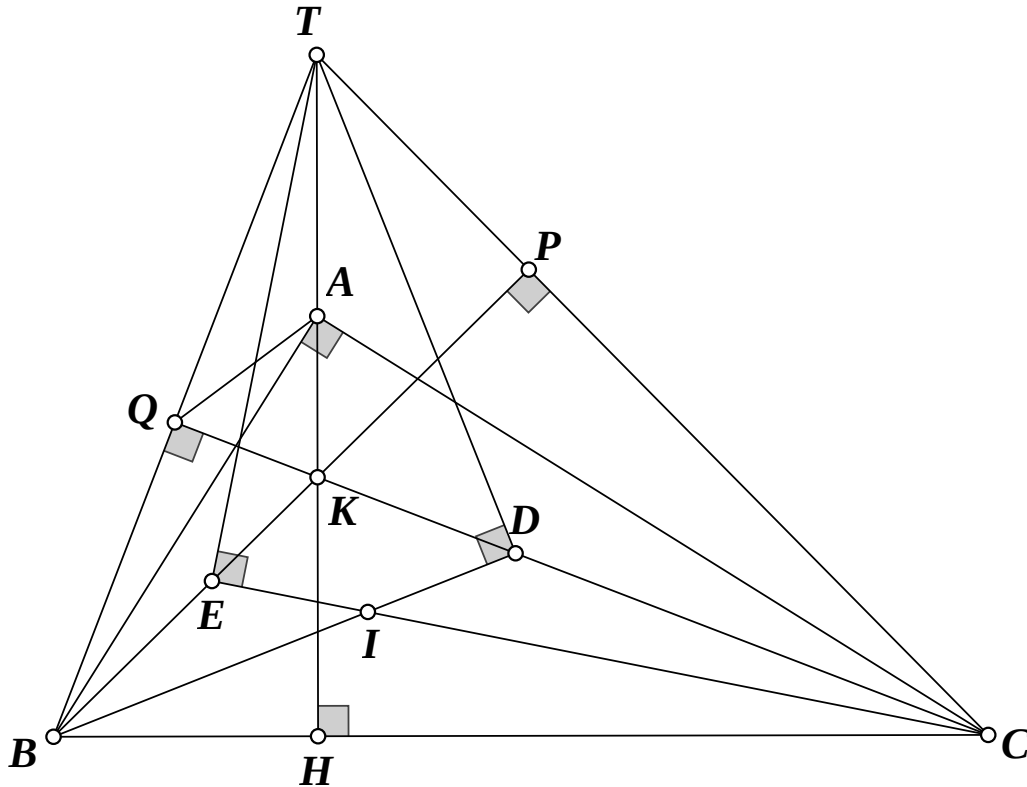
Suy ra điều phải chứng minh

Nhận xét: Đây là 1 bài toán rất đẹp và đề rất đơn giản

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Lấy K bất kì trên cạnh AH. Lấy D, E thuộc cạnh CK và BK sao cho  $BD=BA$ ;  $CE=CA$ . CE cắt BD tại I. Chứng minh rằng  $IE=ID$

~IMO 2012~

Lời giải



Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với KC cắt đường thẳng qua C vuông góc với KB tại T (hình vẽ)

Khi đó K là trực tâm tam giác TAB suy ra T, A, K, H thẳng hàng  
Ta có:

$$BA^2 = BH \cdot BC = BQ \cdot BT$$

$$\Leftrightarrow BD^2 = BQ \cdot BT \Rightarrow BD \perp TD$$

Chứng minh tương tự ta có:  $TE \perp EC$

Mặt khác:

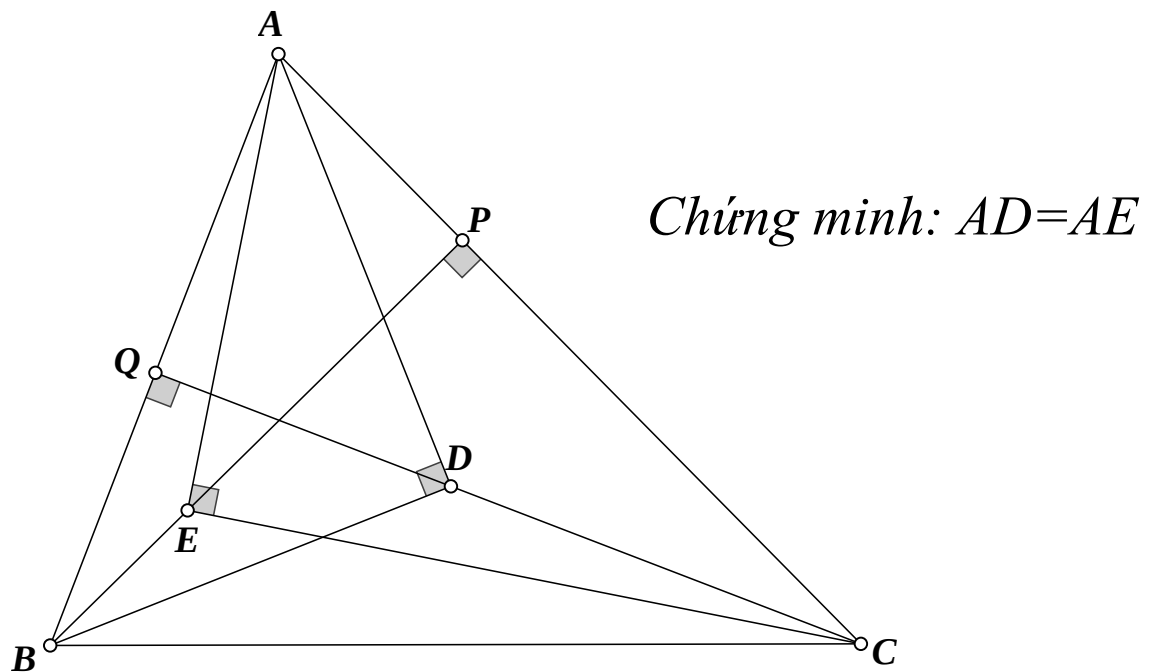
$$TD^2 = TQ \cdot TB = TP \cdot TC = TE^2$$

$$\Rightarrow TE = TD$$

$$\Rightarrow \triangle TIE = \triangle TID (ch - cv)$$

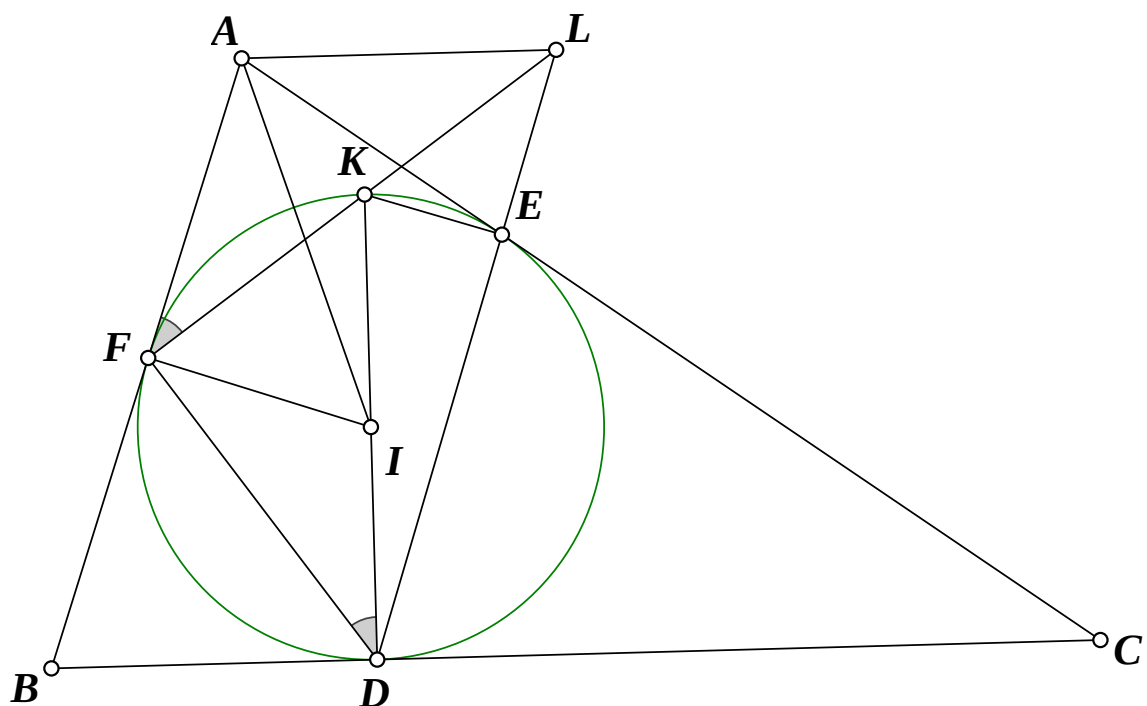
$$\Rightarrow IE = ID (q.e.d)$$

Nhận xét: bài toán này rất khó trong việc kẻ thêm nhưng nó dựa vào bài toán cơ bản sau:



Bài 3: Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) tiếp xúc với BC, AC, AB tại D, E, F. Kẻ đường kính DK của (I). FK cắt DE tại L. Chứng minh: AL song song với BC

Lời giải



Ta có:

$$\begin{aligned}\angle FDE &= 180^\circ - \angle FDB - \angle EDC \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle ACB}{2}\right) \\ &= 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} \\ \Rightarrow \angle FLD &= \frac{\angle BAC}{2} = \angle FAI\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{DF}{FL} = \tan \angle FLD = \tan \angle FAI = \frac{FI}{AF} = \frac{ID}{AF}$$

Mặt khác  $\angle AFL = \angle FDI$

Suy ra

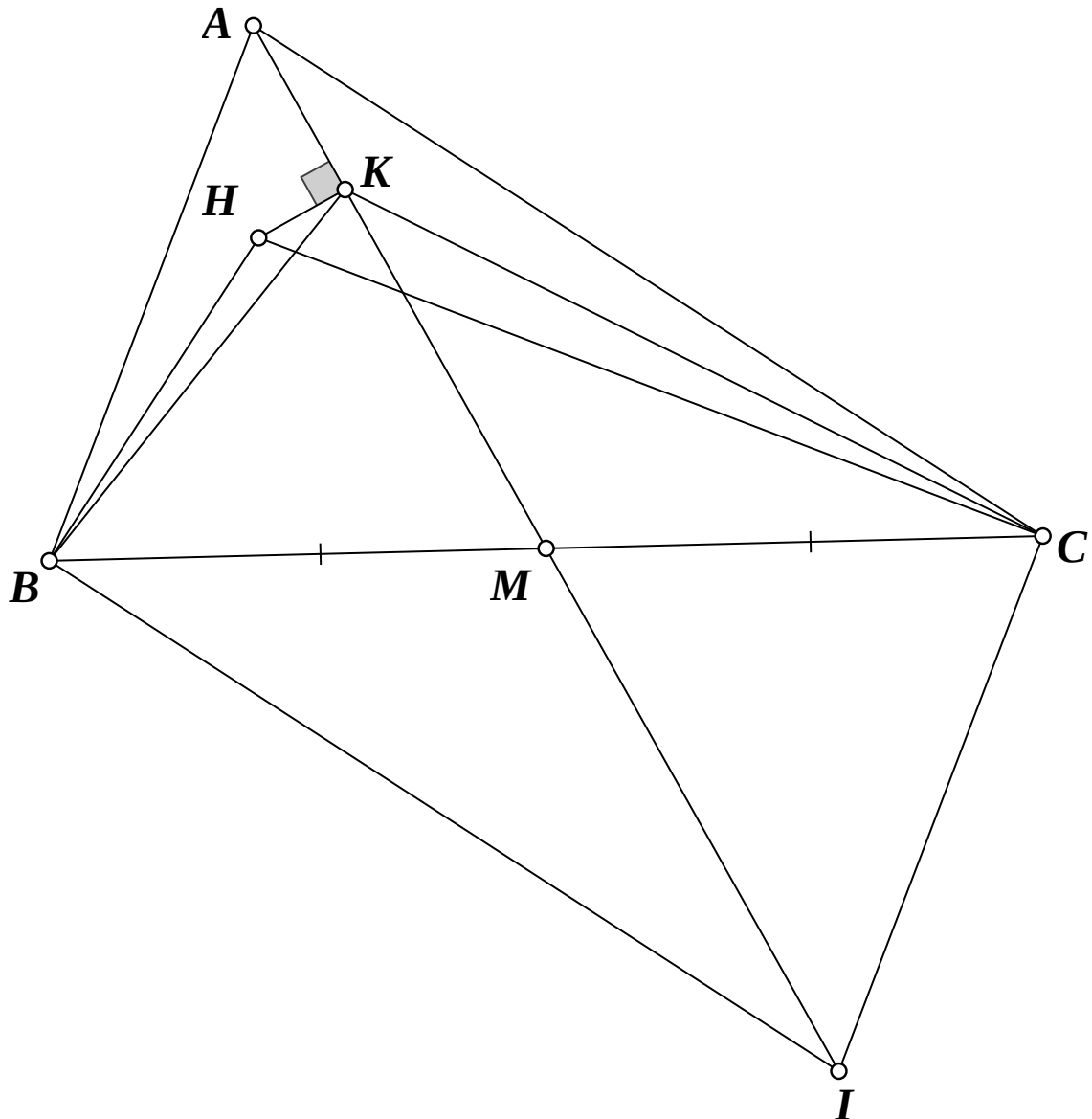
$$\triangle IDF \sim \triangle AFL (c.g.c)$$

$$\Rightarrow AF = AL \Rightarrow AE = AL; EC = DC$$

$$\Rightarrow AL \parallel BC$$

**Bài 4:** Cho tam giác ABC có trực tâm H và trung tuyến AM. Kẻ HK vuông góc với AM. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp tam giác AKB và AKC

Lời giải



Dựng hình bình hành  $ABCI$ .

Ta dễ thấy hai tứ giác  $BHKI$  và  $HKCI$  nội tiếp (dựa vào các góc vuông). Từ đó suy ra 5 điểm  $B, H, K, C, I$  thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \angle KCB = \angle KIB = \angle KAC$  (so le trong)

Suy ra  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $AKC$

Tương tự ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Cách dựng hình rất đơn giản và rất hay cho ta một lời giải đẹp !

Mọi ý kiến đóng góp & các bài toán hay xin gửi về địa chỉ Email:  
[Khoanguyen17112003@gmail.com](mailto:Khoanguyen17112003@gmail.com)

Xin cảm ơn mọi người !