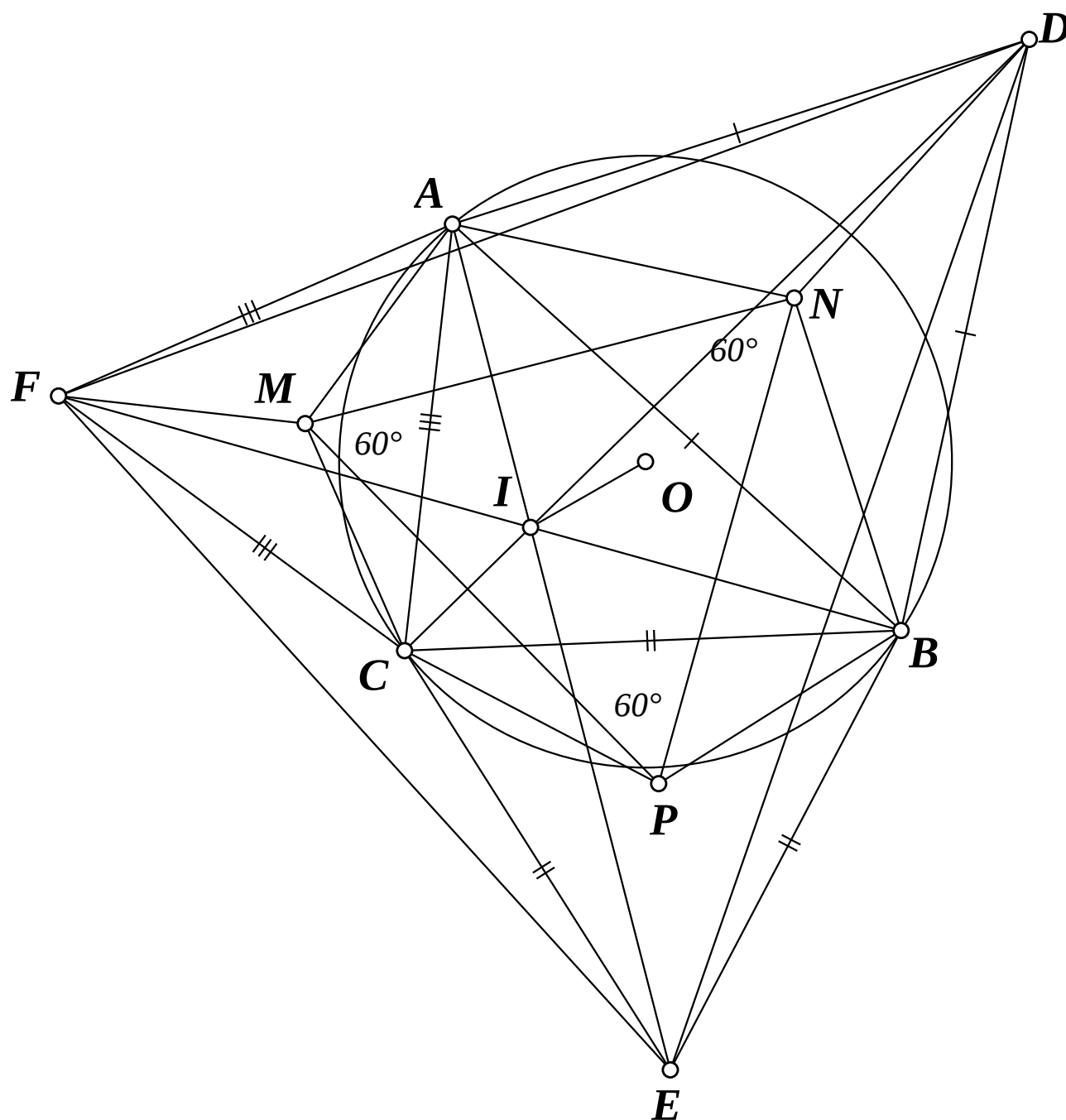


# Tạp chí Apollonius

No.3



Biên soạn và sưu tầm: Nguyễn Đăng Khoa– THCS Lâm Thao – Lâm Thao – Phú Thọ

PROBLEMS

I, Đại số & Số học

Bài 1: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2$$

Bài 2: Cho 2 số  $a, b > 0$  và phương trình  $x^3 - x^2 + 3ax - b = 0$

Chứng minh rằng:  $\frac{a^3}{b^3} + 27b \geq 28$

Bài 3: Cho 3 số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \leq 4$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{28}{xy+z} + \frac{1}{yz+x} + \frac{2018}{zx+y} \geq \frac{2047}{2}$

Bài 4:

a, Cho  $p$  là số nguyên tố có dạng  $4k+3$ . Chứng minh nếu  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $a^2 + b^2 \vdots p$  thì  $a \vdots p; b \vdots p$

b, Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

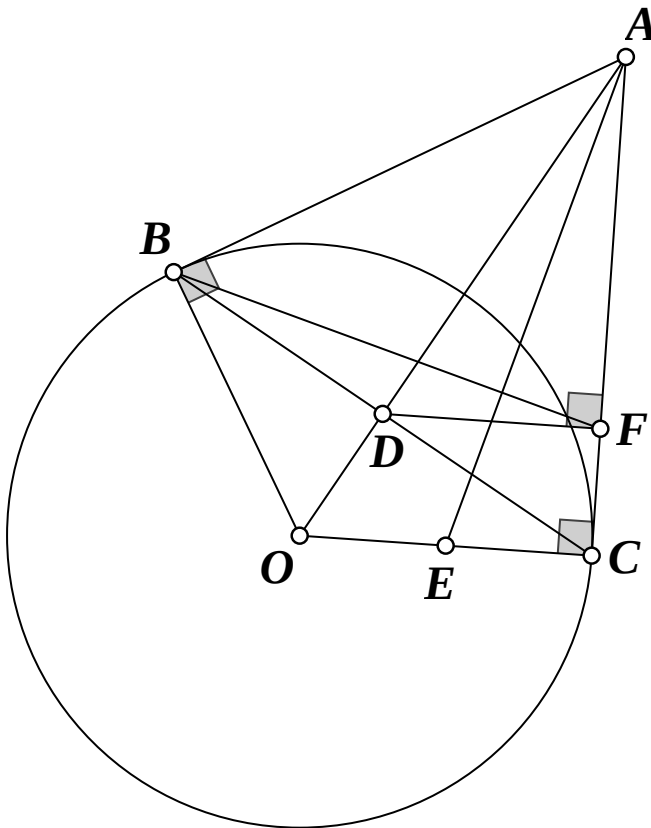
$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$$

(trích đề thi THPT chuyên KHTN)

Bài 5: Giải phương trình nghiệm nguyên  $x^2 - y^3 = 7$

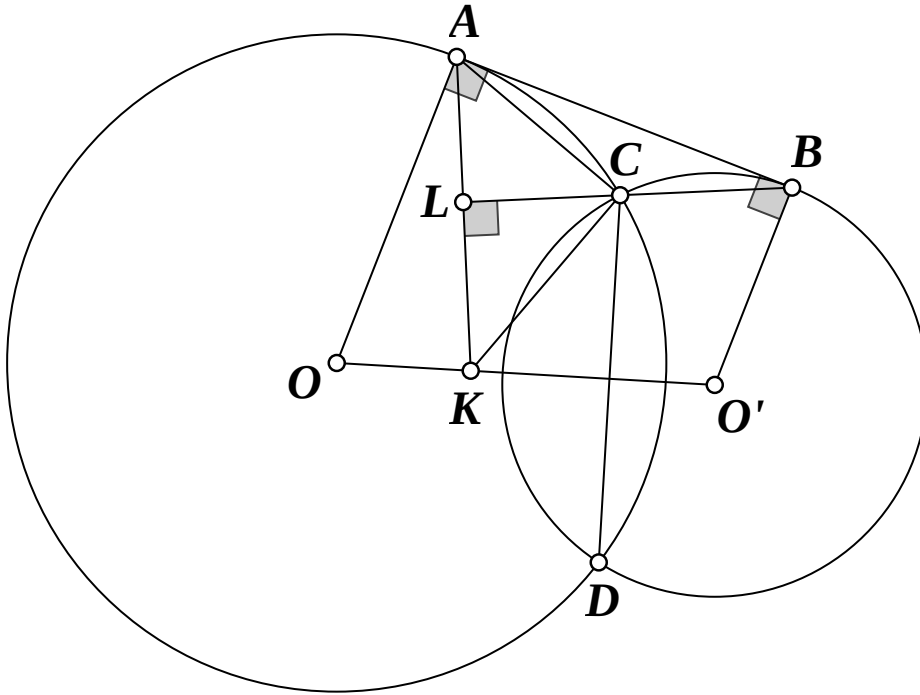
## II, Hình học

Bài 1: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại D. Kẻ DF vuông góc với AC và lấy E là trung điểm OC. Chứng minh rằng: AE vuông góc với BF.

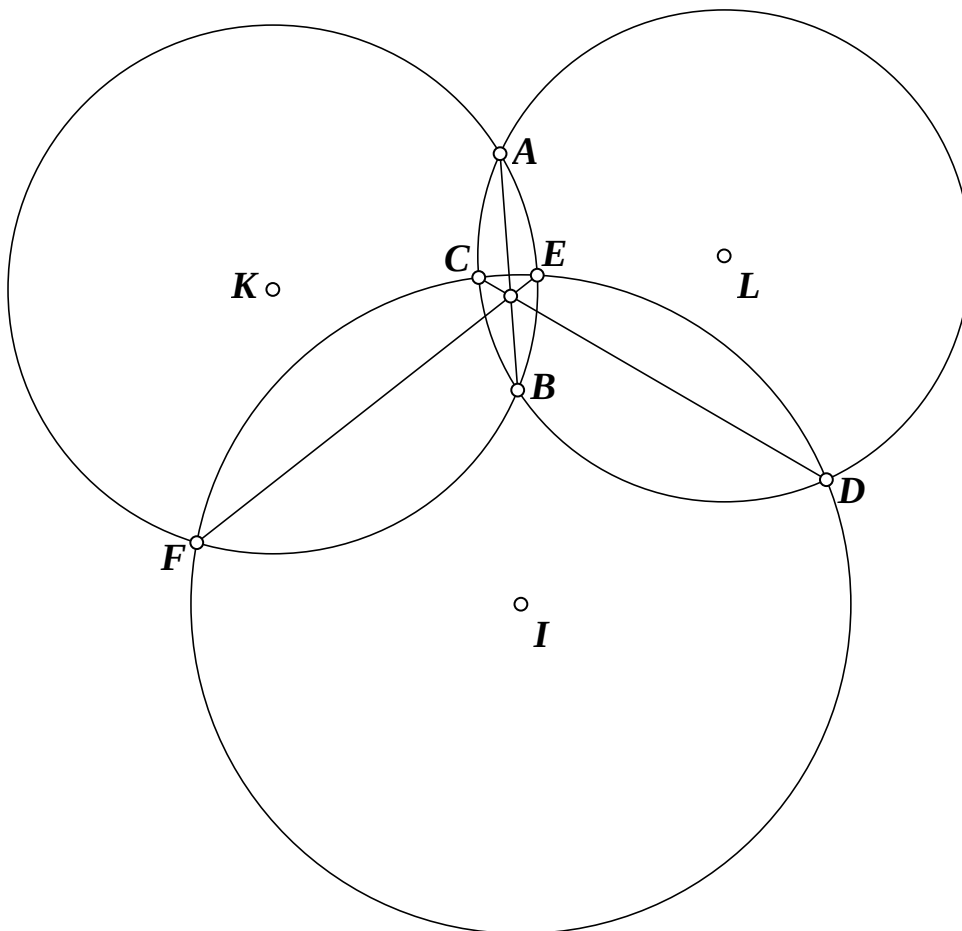


Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại C và D; hai đường tròn có tiếp tuyến chung ngoài AB (hình vẽ). Qua A dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt OO' tại K. Chứng minh AC vuông góc với CK.

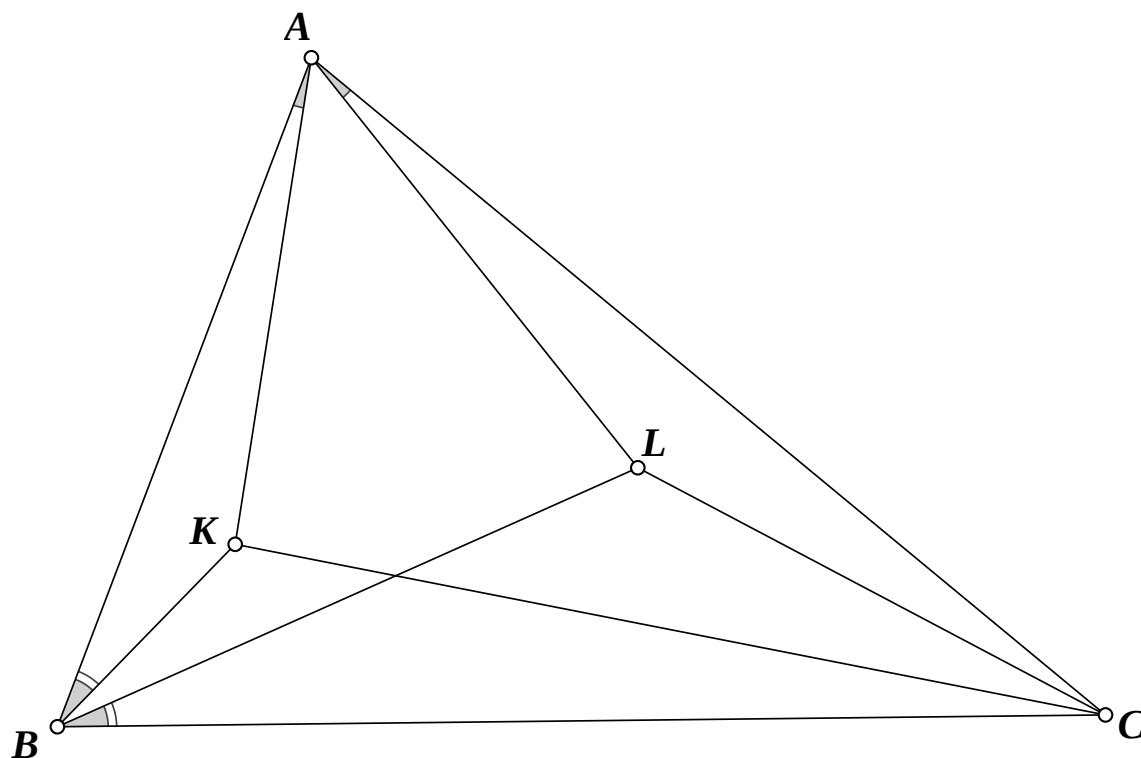
~China TST~



Bài 3: Cho 3 đường tròn (K), (L), (M) cắt nhau (hình vẽ). Chứng minh 3 dây cung chung của từng cặp đường tròn đồng quy (Định lý về trục đẳng phương)



Bài 4: Cho tam giác ABC, trong tam giác lấy 2 điểm K và L thỏa mãn điều kiện  $\angle LAC = \angle KAB$ ;  $\angle KBA = \angle LBC$ . Chứng minh:  
 $\angle LCA = \angle KCB$



SOLUTIONS

I, Đại số & Số học

Bài 1: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2$$

$$\Rightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + 4 + 4\sqrt{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} - 2 = 2\sqrt{x+y}$$

$$\Rightarrow xy - 4\sqrt{xy} + 4 = 4(x+y) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x+y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Z}$$

Mặt khác:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{x} = x + \sqrt{xy} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{Z}; \sqrt{y} \in \mathbb{Z}$$

Ta đặt:  $\sqrt{x} = a; \sqrt{y} = b; \sqrt{x+y} = c$  ( $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

Ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b = c + 2 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow (a + b - 2)^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab - 4a - 4b + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - 2a - 2b + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 2$$

Đến đây các bạn tự giải tiếp với a, b là các số tự nhiên

Bài 2: Cho 2 số a, b > 0 và phương trình  $x^3 - x^2 + 3ax - b = 0$

Chứng minh rằng:  $\frac{a^3}{b^3} + 27b \geq 28$

Lời giải

Giả sử phương trình có 1 nghiệm  $x_0 < 0$  thì thay vào ta có:

$x_0^3 - x_0^2 + 3ax_0 - b < 0$  (vô lý). Vậy 3 nghiệm của phương trình trên là  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Theo Vi-et bậc 3 ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1(1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3a(2) \\ x_1x_2x_3 = b(3) \end{cases}$$

Từ (2) ta có:

$$3a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 3\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} = 3\sqrt[3]{b^2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 \geq b^2 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} + 27b \geq \frac{1}{b} + 27b$$

Mặt khác ta lại có:

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = 3\sqrt[3]{b}$$

$$\Leftrightarrow b \leq \frac{1}{27}$$

Suy ra:

$$\frac{a^3}{b^3} + 27b \geq \frac{1}{b} + 27b = \left( \frac{1}{27b} + 27b \right) + \frac{26}{27b} \geq 2 + 26 = 28(q.e.d)$$

Bài 3: Cho 3 số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{28}{xy+z} + \frac{1}{yz+x} + \frac{2018}{zx+y} \geq \frac{2047}{2}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2xy + xyz + z^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2xy + xyz + z^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy + z - 2)(z + 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xy + z - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xy + z \leq 2$$

Hoàn toàn tương tự ta có:  $yz + x \leq 2; zx + y \leq 2$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4:

a, Cho  $p$  là số nguyên tố có dạng  $4k+3$ . Chứng minh nếu  $a, b \in \mathbb{Z}$  và  $a^2 + b^2 \vdots p$  thì  $a \vdots p; b \vdots p$

Lời giải

TH1: Nếu một trong hai số  $a$  và  $b$  chia hết cho  $p$  thì dễ dàng có điều phải chứng minh.

TH2: Cả 2 số  $a, b$  không chia hết cho  $p$

Theo định lý Fermat ta có:

$$a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p) \Leftrightarrow a^{4k+2} \equiv 1(\text{mod } p)$$

$$b^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p) \Leftrightarrow b^{4k+2} \equiv 1(\text{mod } p)$$

$$\Rightarrow (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \equiv 2(\text{mod } p)$$

Mặt khác ta có:

$$(a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : a^2 + b^2 : p$$

Suy ra điều vô lý

Vậy ta có điều phải chứng minh

Nhận xét: Đây là một bổ đề trong số học có nhiều ứng dụng.

$b$ , Ta có:

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617 = 3^5 \cdot 19$$

$$\Rightarrow 12x^2 + 26xy + 15y^2 : 19$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - 12xy + 15y^2 + 38xy : 19$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2 - 4xy + 5y^2) : 19$$

$$\Rightarrow (2x - y)^2 + (2y)^2 : 19$$

Vì 19 là số nguyên tố dạng  $4k+3$  nên theo phần a ta có:

$$2x - y, 2y : 19$$

$$\Rightarrow x, y : 19 \Rightarrow 12x^2 + 26xy + 15y^2 : 19^2$$

Điều này là vô lý. Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

### Bài 5: Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - y^3 = 7$

Lời giải

Nếu  $y$  là số chẵn thì ta có:

$$x^2 = y^3 + 7 \equiv 7(\text{mod } 8). \text{ Điều này vô lý}$$

Suy ra  $y$  là số lẻ. Ta có:

$$x^2 - y^3 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

Với  $y = 4k + 1$  thì  $y + 2$  chia 4 dư 3

Với  $y = 4k + 3$  thì  $y^2 - 2y + 4$  chia 4 dư 3

Vậy  $x^2 + 1$  chia 4 dư 3  $\Leftrightarrow x^2 \equiv 2(\text{mod } 4)$ . Điều này vô lý

Vậy phương trình vô nghiệm.

Cách khác:

Ta kết luận được rằng với mọi số  $y$  lẻ thì  $y^3 + 8$  luôn có ước nguyên tố  $p$  dạng  $4t+3$ . Do đó  $x^2 + 1 \vdots p$

Áp dụng bổ đề bài số 4 thì suy ra 1 chia hết cho  $p$ . Điều này vô lý

Suy ra phương trình không có nghiệm nguyên.

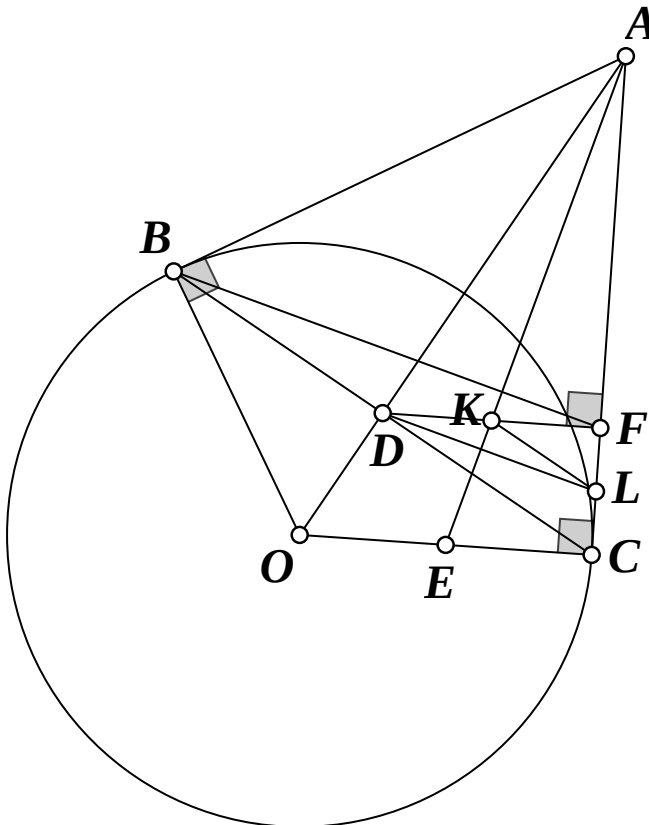
Tài liệu tham khảo:

Bổ đề về tổng bình phương và số nguyên tố - Nguyễn Đăng Khải Hoàn

## II, Hình học

**Bài 1:** Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại D. Kẻ DF vuông góc với AC và lấy E là trung điểm OC. Chứng minh rằng: AE vuông góc với BF.

Lời giải



Lấy K là giao điểm của DF và AE. Theo Thales ta dễ dàng chứng minh được:  $DK = KF$

Lấy L là trung điểm FC. Suy ra KL song song với DC

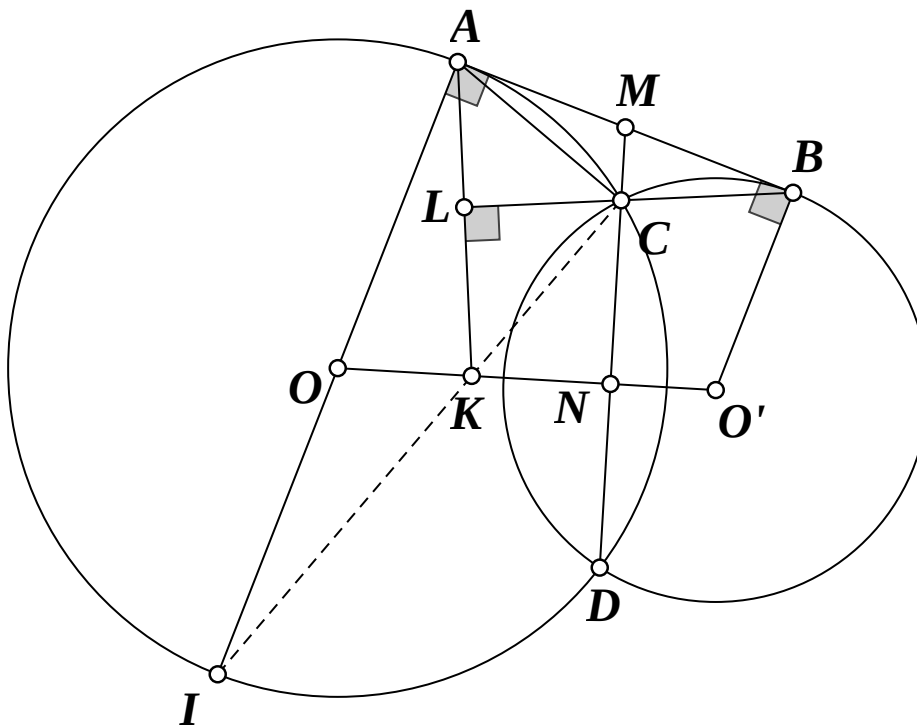
Suy ra K là trực tâm tam giác ADL. Từ đó ta có: AK vuông góc với DL.

Mặt khác DL là đường trung bình nên DL song song với BF. Suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 2:** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại C và D; hai đường tròn có tiếp tuyến chung ngoài AB (hình vẽ). Qua A dựng đường thẳng vuông góc với BC cắt OO' tại K. Chứng minh AC vuông góc với CK.

~China TST~

Lời giải



Kẻ đường kính AI của (O). Kéo dài BC cắt AB tại M, CD cắt OO' tại N.

Ta đi chứng minh I, K, C thẳng hàng là chứng minh hoàn tất.

Thật vậy ta dễ dàng chứng minh được:

$$AM^2 = MC.MD = MB^2 \Rightarrow MA = MB$$

Ta có:

$$\angle CBM = \angle OAK (= 90^\circ - \angle LAB)$$

Do tứ giác AMNO nội tiếp nên :

$$\angle CMB = \angle AOK$$

$$\Rightarrow \triangle CMB \sim \triangle KOA (g.g)$$

$$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle KIA (c.g.c)$$

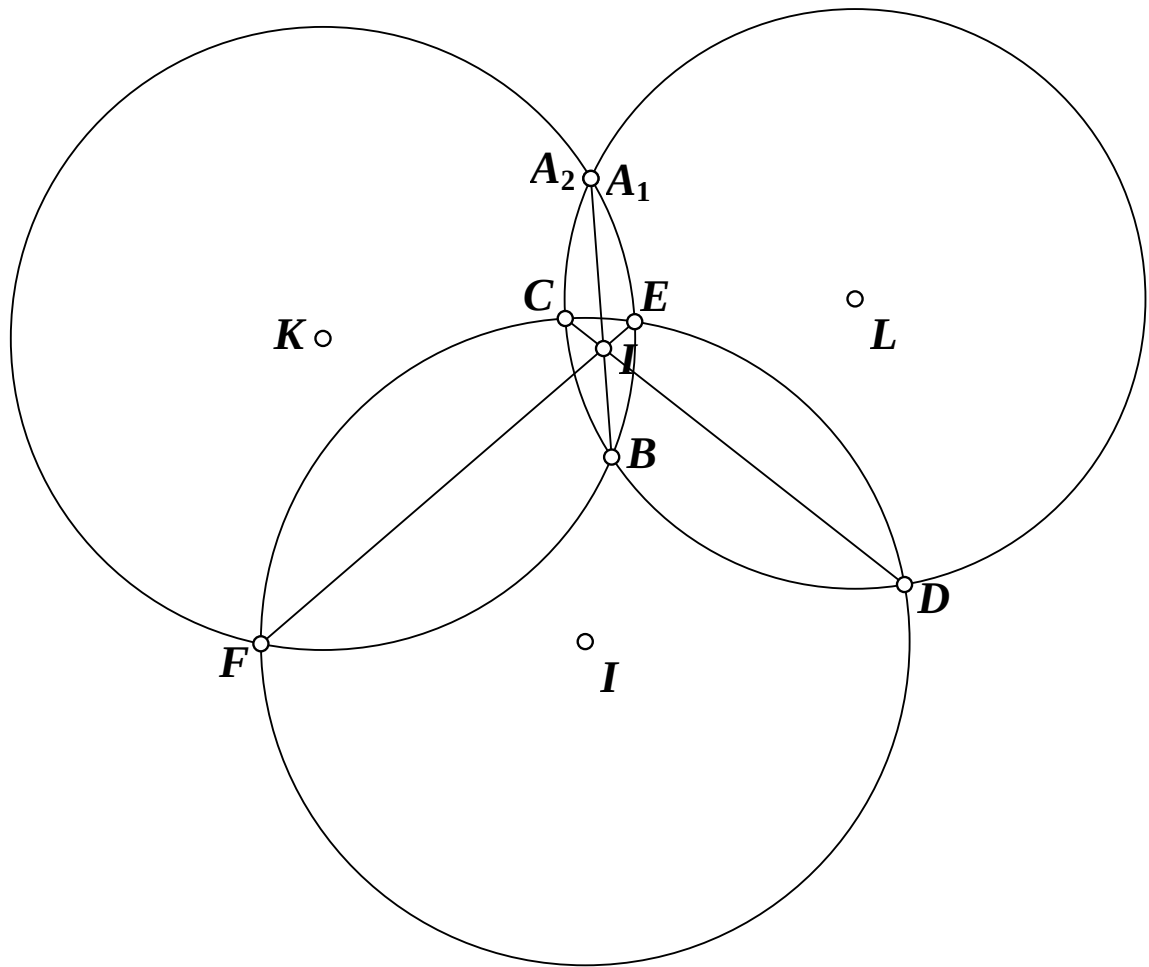
$$\Rightarrow \angle CAB = \angle KIA$$

$$\text{Mà } \angle CAB = \angle CIA (= 90^\circ - \angle CAI) \Rightarrow \angle KIA = \angle CIA$$

Vậy C, I, K thẳng hàng. Suy ra điều phải chứng minh .

**Bài 3:** Cho 3 đường tròn (K), (L), (M) cắt nhau (hình vẽ). Chứng minh 3 dây cung chung của từng cặp đường tròn đồng quy (Định lý về trục đẳng phương)

Lời giải



Lấy I là giao của CD và EF, BI cắt (L) tại  $A_1$ ; BI cắt (K) tại  $A_2$

Ta có:

$$BI.IA_1 = CI.ID = EI.FI = BI.IA_2$$

$$\Leftrightarrow IA_1 = IA_2 \Rightarrow A_1 \equiv A_2 \Rightarrow A \equiv A_1 \equiv A_2$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán này sử dụng phương pháp 3 điểm trùng nhau rất hay và ngắn gọn

Bài toán tương tự:

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BD, CE. Đường tròn đường kính BE cắt đường tròn đường kính CD tại K và L. Chứng minh A, K, L thẳng hàng.



Suy ra tứ giác ALCI nội tiếp.

Ta có:

$$\Delta BKA \simeq \Delta BCI (g.g)$$

$$\Rightarrow \Delta KBC \simeq \Delta ABI (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle KCB = \angle AIL = \angle ACL (q.e.d)$$

Mọi ý kiến đóng góp & các bài toán hay xin gửi về địa chỉ Email:

[khoanguyen17112003@gmail.com](mailto:khoanguyen17112003@gmail.com)

Cảm ơn mọi người !