

Tiếp cận sơ cấp bất đẳng thức Fisher

Trương Phước Nhân, 10/02/2018

BIBD (balanced incomplete block design) với tham số (v, b, r, k, λ) là một bộ sắp thứ tự $(V, \mathcal{B})$ trong đó V là một tập hữu hạn gồm v vật (các vật này ta sẽ gọi là *phần tử* hoặc là *điểm*), $\mathcal{B}$ là một họ bao gồm b tập mà mỗi tập này là một k -tập con của V (mà ta gọi là các *khối*) sao cho mỗi điểm được chứa trong chính xác là r khối và mỗi cặp phần tử bất kì của V chứa trong chính xác λ khối. (xem bài viết “**BIBD**” và “**Lý thuyết cấu hình tổ hợp**”)

Chọn cố định một khối B , gọi x_i là số các khối có giao với B tại chính xác là i phần tử.

Kết quả 1:

$$\text{i) } \sum x_i \binom{i}{2} = \binom{k}{2} (\lambda - 1)$$

$$\text{ii) } \sum i x_i = k(r - 1)$$

Chứng minh:

i) Bằng cách đếm bằng hai cách số các cặp (A, P) trong đó P là một cặp phần tử của khối B và A là một khối khác B có chứa P ta dễ dàng chứng minh được : $\sum x_i \binom{i}{2} = \binom{k}{2} (\lambda - 1)$

ii) Bằng cách đếm bằng hai cách số các cặp (A, y) trong đó y là một phần tử của B và A là một khối khác B có chứa y ta cũng dễ dàng chứng minh được : $\sum i x_i = k(r - 1)$

Đặt m là trung bình cộng của đại lượng $|B \cap C|$ lấy trên tất cả các khối $C \neq B$, do đó $m(b - 1) = \sum_i i x_i$.

Kết quả 2: $(b - 1)k(k - 1)(\lambda - 1) + (b - 1)k(r - 1) \geq k^2(r - 1)^2$

Chứng minh: Bằng các tính toán đại số ta nhận thấy :

$$\begin{aligned} \sum (i - m)^2 x_i &= \sum i^2 x_i - 2m \sum i x_i + m^2 \sum x_i = \sum \left\{ 2 \binom{i}{2} + i \right\} x_i - 2m \sum i x_i + m^2 \sum x_i \\ &= 2 \sum \binom{i}{2} x_i - (2m - 1) \sum i x_i + m^2 \sum x_i \\ &= 2 \sum \binom{i}{2} x_i - (2m - 1) \sum i x_i + m^2 \sum x_i \quad (\text{kết quả 1 phần i) và phần ii}) \\ &= 2 \binom{k}{2} (\lambda - 1) - (2m - 1)k(r - 1) + m^2(b - 1) \\ &= k(k - 1)(\lambda - 1) - (2m - 1)k(r - 1) + m^2(b - 1) \end{aligned}$$

Hiển nhiên, $\sum (i - m)^2 x_i \geq 0$, do đó ta có đánh giá : $k(k - 1)(\lambda - 1) + m^2(b - 1) \geq (2m - 1)k(r - 1)$

Mặt khác, ta lại nhận thấy rằng $m(b - 1) = \sum_i i x_i = k(r - 1)$, ta suy ra :

$$\begin{aligned} k(k - 1)(\lambda - 1) + mk(r - 1) &\geq (2m - 1)k(r - 1) \\ \Rightarrow k(k - 1)(\lambda - 1) &\geq (m - 1)k(r - 1) \end{aligned}$$

Do đó : $(b - 1) \underbrace{k(k - 1)(\lambda - 1)}_{\geq (m - 1)k(r - 1)} + (b - 1)k(r - 1) \geq (b - 1)k(r - 1)[(m - 1) + 1] = m(b - 1)k(r - 1) = k^2(r - 1)^2$

Kết quả 3: $(r - k)(v - k)(r - \lambda) \geq 0$. Hơn nữa, ta thu được bất đẳng thức Fisher : $b \geq v$.

Chứng minh: Theo kết quả 2), ta thu được :

$$\begin{aligned} (b - 1)k(k - 1)(\lambda - 1) + (b - 1)k(r - 1) &\geq k^2(r - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (bk - k)(k - 1)(\lambda - 1) + (bk - k)(r - 1) &\geq k^2(r - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (vr - k)(k - 1)(\lambda - 1) + (vr - k)(r - 1) &\geq k^2(r - 1)^2 \quad (bk = vr) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (vr-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-1) - (vr-k)(k-1) \geq k^2(r-1)^2 \\
&\Leftrightarrow (vr-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) \geq k^2(r-1)^2 \\
&\Leftrightarrow [(vr-r) + (r-k)](k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) \geq k^2(r-1)^2 \\
&\Leftrightarrow (v-1)r(k-1)\lambda + (r-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) \geq k^2(r-1)^2 \\
&\Leftrightarrow r^2(k-1)^2 + (r-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) \geq k^2(r-1)^2 \\
&\Leftrightarrow (r-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) + \underbrace{r^2(k-1)^2 - k^2(r-1)^2}_{a^2-b^2=(a-b)(a+b)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (r-k)(k-1)\lambda + (vr-k)(r-k) + (r-k)(r+k-2rk) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (r-k)[(k-1)\lambda + vr + r - 2rk] \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Đồng thời ta cũng nhận thấy rằng :

$$\begin{aligned}
(k-1)\lambda + vr + r - 2rk &= [(v-1) - (v-k)]\lambda + vr + r - 2rk = \underbrace{\lambda(v-1)}_{=r(k-1)} + vr + r - 2rk - (v-k)\lambda \\
&= vr - rk - (v-k)\lambda = (v-k)r - (v-k)\lambda = (v-k)(r-\lambda) \quad (**)
\end{aligned}$$

Thay (**) vào (*) ta thu được kết quả : $(r-k)(v-k)(r-\lambda) \geq 0$.

Hiển nhiên, ta luôn có $v \geq k$ và $r \geq \lambda$, nên ta suy ra $r \geq k$. Kết hợp với hệ thức cơ bản $bk = vr$, suy ra $b \geq v$.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Ian Anderson, A First Course in Discrete Mathematics, 1st.
- [2]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018
- [3]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cấu hình tổ hợp, 02/02/2018