Lý thuyết cực trị tập hợp

Trương Phước Nhân, 10/02/2018

Hệ Sperner :

Họ tập hợp $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ được gọi là một *đối xích* (hay cũng được gọi *hệ Sperner*) nếu với mọi $S, T \in \mathcal{F}$ và $S \neq T$ ta có $S \not\subseteq T$.

Kết quả 1: Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ với $|X| = n$. Nếu $\mathcal{F}$ là một đối xích thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$

Chứng minh thứ nhất: (sử dụng kĩ thuật shadow và shade – chứng minh ban đầu của Sperner)

Cho $|X| = n$ và $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$, $k < n$.

Shade của họ $\mathcal{F}$ được định nghĩa là $\nabla\mathcal{F} = \left\{ T \in \binom{X}{k+1} : \exists S \in \mathcal{F} \text{ sao cho } S \subset T \right\}$. Do đó, shade $\nabla\mathcal{F}$ của $\mathcal{F}$ chứa tất cả các tập con của X thu được bằng cách bổ sung thêm một phần tử vào một tập nào đó của họ $\mathcal{F}$.

Tương tự, shadow của họ $\mathcal{F}$ được định nghĩa là $\Delta\mathcal{F} = \left\{ T \in \binom{X}{k-1} : \exists S \in \mathcal{F} \text{ sao cho } T \subset S \right\}$, gồm tất cả các tập con của X thu được bằng cách loại đi một phần tử từ một tập nào đó của họ $\mathcal{F}$.

Bổ đề 1: (Sperner)

Cho $|X| = n$ và $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$. Khi đó :

$$|\nabla\mathcal{F}| \geq \frac{n-k}{k+1}|\mathcal{F}| \qquad \text{nếu } k < n$$

$$|\Delta\mathcal{F}| \geq \frac{k}{n-k+1}|\mathcal{F}| \qquad \text{nếu } k > 0$$

Chứng minh bổ đề 1: Không mất tính tổng quát của bài toán ta chỉ xem xét đánh giá cho $|\nabla\mathcal{F}|$, đánh giá cho $|\Delta\mathcal{F}|$ được thực hiện một cách tương tự. Gỉa sử $0 \leq k < n$. Đặt $\mathcal{R} = \{(S,T) : S \in \mathcal{F}, T \in \nabla\mathcal{F}, S \subset T\}$. Ta sẽ tiến hành đánh giá $|\mathcal{R}|$ theo hai cách như sau :

Đầu tiên, với mỗi $S \in \mathcal{F}$ sẽ có $n-k$ tập hợp $T \in \nabla\mathcal{F}$ phân biệt sao cho $S \subset T$, nên $|\mathcal{R}| = (n-k)|\mathcal{F}|$

Tiếp theo, với mỗi tập $T \in \nabla\mathcal{F}$, có $k+1$ cách để chọn ra một tập $S \subset T$ sao cho $|S| = k$, các tập S này có thể không thuộc vào họ $\mathcal{F}$, nên $|\mathcal{R}| \leq (k+1)|\nabla\mathcal{F}|$

Từ hai đánh giá trên ta suy ra : $|\nabla\mathcal{F}| \geq \frac{n-k}{k+1}|\mathcal{F}|$.

Ý tưởng của chứng minh ở đây là khá rõ ràng :

- Ta sẽ "đẩy lên" tất cả các tập trong $\mathcal{F}$ có kích thước $< \frac{n-1}{2}$ bằng cách thay chúng bằng các shade của chúng.

- Ta sẽ " đẩy xuống" tất cả các tập thuộc $\mathcal{F}$ có kích thước $> \frac{n+1}{2}$ bằng cách thay chúng bằng các shadow của chúng.

Bằng cách lặp lại quá trình này ta sẽ thu được một họ thuộc $\binom{X}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. Ta cần chỉ ra rằng quá trình này không làm giảm đi kích thước của họ $\mathcal{F}$

Bổ đề 2:

Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ với $|X| = n$. Đặt $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap \binom{X}{k}$ và gọi $k_{\min}$ là chỉ số k nhỏ nhất sao cho $|\mathcal{F}_k| > 0$, và đặt

$$\mathcal{F}' = \begin{cases} \left(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{k_{\min}}\right) \cup \nabla\mathcal{F}_{k_{\min}} & \text{nếu } k_{\min} < \dfrac{n-1}{2} \\ \mathcal{F} & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}.$$

Tương tự, gọi $k_{\max}$ là chỉ số k lớn nhất sao cho $|\mathcal{F}_k| > 0$, và đặt

$$\mathcal{F}'' = \begin{cases} \left(\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{k_{\max}}\right) \cup \Delta\mathcal{F}_{k_{\max}} & \text{nếu } k_{\max} > \dfrac{n+1}{2} \\ \mathcal{F} & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Khi đó : Nếu $\mathcal{F}$ là một đối xích thì $\mathcal{F}'$ và $\mathcal{F}''$ cũng là các đối xích, và ta có $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$ và $|\mathcal{F}''| > |\mathcal{F}|$

Chứng minh bổ đề 2: Ta sẽ chỉ ra rằng $\mathcal{F}'$ là một đối xích và $|\mathcal{F}'| > |\mathcal{F}|$.

Đầu tiên, nhận thấy rằng $\nabla\mathcal{F}_k \cap \mathcal{F} = \varnothing$, bởi vì nếu ngược lại thì $\mathcal{F}$ không thể là một đối xích.

Áp dụng bổ đề 1) ta cũng nhận thấy rằng $|\nabla\mathcal{F}_k| > |\mathcal{F}_k|$ khi $k < \dfrac{n-1}{2}$, nên $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| - |\mathcal{F}_k| + |\nabla\mathcal{F}_k| > |\mathcal{F}|$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $\mathcal{F}'$ là một đối xích. Thật vậy, bằng phương pháp phản chứng, giả sử tồn tại $S, T \in \mathcal{F}'$ phân biệt sao cho $S \subset T$. Một trong hai tập S, T sẽ phải nằm trong $\nabla\mathcal{F}_{k_{\min}}$; trong trường hợp thì S, T sẽ phải cùng nằm trong $\mathcal{F}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{F}$ là một đối xích. Do $k_{\min}$ là chỉ số k nhỏ nhất sao cho $|\mathcal{F}_k| > 0$, nên ta sẽ phải có $S \in \nabla\mathcal{F}_{k_{\min}}$ và $T \in \mathcal{F}$. Điều này suy ra rằng tồn tại một tập $R \in \mathcal{F}_{k_{\min}} \subseteq \mathcal{F}$ sao cho $R \subset S \subset T$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{F}$ là một đối xích.

Bằng phương pháp lập luận tương tự ta cũng thu được các khẳng định cho họ $\mathcal{F}''$.

Đặt $\mathcal{F}_k = \{S \in \mathcal{F} : |S| = k\}$, trong đó $0 \le k \le n$. Ta thực hiện việc biến đổi họ $\mathcal{F}$ như sau :

1) Nếu chỉ số k nhỏ nhất sao cho $|\mathcal{F}_k| > 0$ nếu $k < \dfrac{n-1}{2}$ thì ta thay $\mathcal{F}_k$ bởi $\nabla\mathcal{F}_k$.

Theo bổ đề 2, quá trình này bảo toàn tính chất đối xích của họ $\mathcal{F}$ và đồng thời không làm giảm đi $|\mathcal{F}|$. Quá trình này kết thúc khi $|\mathcal{F}_k| = 0$ với mọi $k < \dfrac{n-1}{2}$, hay nói cách khác là không còn một thành viên nào của họ $\mathcal{F}$ có kích thước nhỏ hơn $\dfrac{n-1}{2}$

Ta cũng tiến hành xây dựng một thuật toán đối xứng với thuật toán vừa nêu như sau :

2) Nếu chỉ số k lớn nhất sao cho $|\mathcal{F}_k| > 0$ nếu $k > \dfrac{n+1}{2}$ thì ta thay $\mathcal{F}_k$ bởi $\Delta\mathcal{F}_k$.

Theo bổ đề 2, quá trình này bảo toàn tính chất đối xích của họ $\mathcal{F}$ và đồng thời không làm giảm đi $|\mathcal{F}|$. Quá trình này kết thúc khi $|\mathcal{F}_k| = 0$ với mọi $k > \dfrac{n+1}{2}$.

Họ tập thu được bằng cách áp dụng hai thuật toán trên nằm trong họ $\binom{X}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$, hiển nhiên $\binom{X}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ cũng là một đối xích . Bởi vì kích thước của họ $\mathcal{F}$ không bị giảm đi khi ta thực hiện thuật toán nên ta có , $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Chứng minh thứ hai : (kỹ thuật đếm – chứng minh của Lubell)

Cho π là một hoán vị của tập X . Ta sẽ nói rằng $S \subseteq X$ là tiền tố của π nếu $S = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{|S|}\}$, có nghĩa là S chính là $|S|$ vị trí đầu tiên của hoán vị π, còn hoán vị π được gọi nhận S làm tiền tố.

Bằng cách cố định tập $S \subseteq X$, ta dễ dàng nhận thấy số các hoán vị π của tập X sao cho S là tiền tố của π là $|S|!(n-|S|)!$. Đồng thời, do $\mathcal{F}$ là một đối xích , nên ta nhận thấy rằng không có bất kì một hoán vị π nào của tập X nhận hai thành viên khác nhau của họ $\mathcal{F}$ làm tiền tố, bởi vì nếu ngược lại thì sẽ xảy ra việc thành viên này sẽ chứa thành viên kia nên $\mathcal{F}$ không là một đối xích . Do đó số các hoán vị π nhận $S \in \mathcal{F}$ là tiền tố là $\sum_{S\in\mathcal{F}} |S|!(n-|S|)!$, đồng thời số hoán vị này không thể vượt quá tổng số các hoán vị là $n!$, do đó :

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} |S|!(n-|S|)! \le n!$$

Bằng cách chia hai vế của đánh giá trên cho $n!$, ta được :

$$\sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} = \sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{|S|!(n-|S|)!}{n!} \le 1 \quad (*)$$

(bất đẳng thức Lubell – Yamamoto – Meschalkin- thường được gọi tắt là LYM)

Bởi vì $\binom{n}{|S|} \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ nên $\sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} \ge \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra : $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$

<u>Chứng minh thứ ba :</u> (phương pháp xác suất – đề xuất bởi Noga Alon)

Đầu tiên ta chọn ra ngẫu nhiên một hoán vị π của tập X (phép chọn này được thực hiện theo phân bố đều).

Ta xây dựng một xích cực đại từ hoán vị π như sau: $\mathcal{C}_\pi = \{\{\pi_i : 1 \le i \le k\} : 0 \le k \le n\}$

Với mỗi $S \in \mathcal{F}$, ta gọi X_S là một $(0,1)$- biến ngẫu nhiên đặc trưng cho sự kiện $S \in \mathcal{C}_\pi$ như sau :

$$X_S = \begin{cases} 1 \text{ nếu } S \in \mathcal{C}_\pi \\ 0 \text{ trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Chú ý rằng, $\mathcal{C}_\pi$ có chính xác một thành viên có kích thước $|S|$, $E[X_S] = \Pr[S \in \mathcal{C}_\pi] = \frac{1}{\binom{n}{|S|}}$.

Đặt $X = \sum_{S\in\mathcal{F}} X_S$, sử dụng tính tuyến tính của kì vọng ta có, $E[X] = \sum_{S\in\mathcal{F}} E[X_S] = \sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|S|}}$

Mặt khác , ta nhận xét rằng $X = |\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_\pi| \le 1$, bởi vì $\mathcal{F}$ là một đối xích nên nó chỉ có thể giao với một xích tại không quá một phần tử. Do đó : $\sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} = E[X] \le 1$.

Quá trình lập luận tiếp theo như trong chứng minh thứ hai.

<u>Hệ hoa hướng dương :</u>

Một hệ tập hợp được gọi là hoa hướng dương nếu như giao của hai thành viên phân biệt bất kì của hệ luôn là một tập cố định, cụ thể:

Một họ tập $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ gọi là hoa hướng dương kích thước r với nhụy $C \subseteq X$ nếu $\forall S,T \in \mathcal{F}, S \ne T, S \cap T = C$ và $|\mathcal{F}| = r$.

Lưu ý rằng hệ $\mathcal{F}$ gồm các thành viên có giao hai tập phân biệt bất kì được coi như là hoa hướng dương với nhụy $C = \varnothing$.

Bổ đề hoa hướng dương :

Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$. Nếu $|\mathcal{F}| > k!(r-1)^k$ thì $\mathcal{F}$ chứa một hoa hướng dương kích thước r.

Chứng minh :

Ta chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp theo k.

Với $k=1$, $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{1}$, tất cả các thành viên của họ $\mathcal{F}$ đều có giao khác rỗng. Nếu $|\mathcal{F}| > r-1$, ta có thể chọn r thành viên bất kì để tạo thành một hoa hướng dương.

Bây giờ ta xem xét $k \geq 2$ và giả sử rằng khẳng định của bài toán đúng với mọi số nguyên nhỏ hơn k.

Đặt $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ là họ cực đại các thành viên phân biệt , nghĩa là với bất kì $S,T \in \mathcal{G}, S \neq T, S \cap T = \varnothing$.

Nếu $|\mathcal{G}| \geq r$ thì $\mathcal{G}$ là một hoa hướng dương kích thước r và ta có điều phải chứng minh.

Gỉa sử $|\mathcal{G}| \leq r-1$, và đặt $Y = \bigcup_{S \in \mathcal{G}} S$. Khi đó $|Y| = k|\mathcal{G}| \leq k(r-1)$ (bởi vì tất cả các thành viên của $\mathcal{G}$ đều phân biệt nhau). Ta khẳng định rằng Y có giao khác rỗng với tất cả các thành viên của họ $\mathcal{F}$, bởi vì nếu ngược lại thì ta sẽ tìm được một tập $S \in \mathcal{F}$ sao cho $S \cap Y = \varnothing$ và bằng cách bổ sung tập S này vào họ $\mathcal{G}$ ta sẽ thu được một họ các thành viên phân biệt mới, điều này mau thuẫn với tính cực đại của họ $\mathcal{G}$.

Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu , ta sẽ chỉ ra được một phần tử $y \in Y$ được chứa trong ít nhất

$\frac{|\mathcal{F}|}{|Y|} > \frac{k!(r-1)^k}{k(r-1)} = (k-1)!(r-1)^{k-1}$ thành viên của họ $\mathcal{F}$.

Xóa phần tử y vừa nêu trên và xét họ $\mathcal{H} = \{S \setminus \{y\} : S \in \mathcal{F} \text{ và } y \in S\}$,ta sẽ thu được một họ $\mathcal{H} \subseteq \binom{X}{k-1}$ và $|\mathcal{H}| > (k-1)!(r-1)^{k-1}$, sử dụng giả thiết quy nạp , họ $\mathcal{H}$ chứa một hoa hướng dương kích thước r. Bằng cách bổ sung phần tử y vào các thành viên của hoa hướng này ta thu được điều phải chứng minh.

Định lý Erdos – Ko – Rado:

Một họ $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ được gọi là giao nếu với mọi $S,T \in \mathcal{F}, S \cap T \neq \varnothing$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là : " Một họ giao có thể có tối đa bao nhiêu thành viên?"

Giả sử $|X| = n$. Nếu $n < 2k$ thì hai tập con k - phần tử bất kì đều có giao khác rỗng nên câu trả lời của ta thật là đơn giản $\binom{n}{k}$.

Kết quả 2 : (Erdos – Ko – Rado)

Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ với $|X| = n$ và $n \geq 2k$. Nếu $\mathcal{F}$ là họ giao thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

Chứng minh thứ nhất : (kỹ thuật đếm bằng hai cách – đề xuất bởi Katona)

Cho π là một hoán vị vòng quanh của tập X, một hoán vị vòng quanh nếu ta có thể biểu diễn các phần tử của X trên một đường tròn và nhận được ảnh của hoán vị qua việc thực hiện phép quay đường tròn này. Dễ dàng tính được là có chính xác $(n-1)!$ hoán vị vòng quanh của một tập có n phần tử .

Đặt $\mathcal{G}_\pi = \left\{\left\{\pi_{(i+j) \bmod n} : j \in [k]\right\} : i \in [n]\right\}$ là tập hợp các k - cung của hoán vị π.

Bổ đề 3: Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ với $|X| = n$ và $n \geq 2k$. Nếu $\mathcal{F}$ là họ giao thì với mọi hoán vị vòng quanh π của tập X ta đều có $|\mathcal{G}_\pi \cap \mathcal{F}| \leq k$.

Chứng minh bổ đề 3: Bằng cách cố định một hoán vị vòng quanh π của tập X.

Đặt $A_i = \left\{\pi_{(i+j) \bmod n} : j \in [k]\right\}$. Khi đó ta có thể biểu diễn lại $\mathcal{G}_\pi$ dưới dạng $\mathcal{G}_\pi = \{A_i : i \in [n]\}$.

Giả sử rằng $A_t \in \mathcal{F}$, do $\mathcal{F}$ là họ giao, nên tập A_i khác A_t nằm trong họ $\mathcal{F}$ chỉ có thể là $2k-2$ tập A_i với $t-(k-1) \leq i \leq t+k-1, i \neq t$. Ta thực hiện việc phân hoạch các tập hợp này thành $k-1$ cặp $\{A_i, A_{i+k}\}$ trong

đó $t-(k-1)\le i\le t-1$. Lưu ý rằng do $n\ge 2k$ nên $A_i\cap A_{i+k}=\varnothing$. Do $\mathcal{F}$ là họ giao nên $\mathcal{F}$ chứa tối đa một tập hợp trong mỗi cặp này.

Đặt $\mathcal{R}=\{(S,\pi):\pi$ là một hoán vị vòng quanh của $X, S\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}_\pi\}$. Ta sẽ đếm $\mathcal{R}$ theo hai cách :
Đầu tiên, theo bổ đề thì $|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}_\pi|\le k$ với mọi hoán vị vòng quanh π. Do có tổng cộng $(n-1)!$ hoán vị vòng quanh nên $|\mathcal{R}|=\sum_{\pi \text{ là hoán vị vòng quanh}}|\mathcal{F}\cap\mathcal{G}_\pi|\le k(n-1)!$.
Tiếp theo, với mỗi $S\in\mathcal{F}$, có chính xác $|S|!(n-|S|)!=k!(n-k)!$ hoán vị vòng quanh π sao cho S là một cung. Do đó : $|\mathcal{R}|=\sum_{S\in\mathcal{F}}k!(n-k)!=|\mathcal{F}|k!(n-k)!$.
Từ hai đánh giá trên ta suy ra : $|\mathcal{F}|\le\dfrac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}=\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\dbinom{n-1}{k-1}$

<u>Chứng minh thứ hai:</u> (kỹ thuật shifting hay còn được gọi là compression – chứng minh gốc của Erdos – Ko - Rado)
Gỉa sử $\mathcal{F}\subseteq 2^{[n]}$ và $0\le i\ne j\le n-1$. Ta định nghĩa toán tử shift S_{ij} trên họ tập $\mathcal{F}$ như sau:
1) Với mỗi $T\in\mathcal{F}$ ta thay bởi $S_{ij}(T)=\begin{cases}T_{ij}=(T\setminus\{j\})\cup\{i\} & \text{nếu } j\in T, i\notin T, T_{ij}\notin\mathcal{F}\\ T & \text{trong trường hợp ngược lại}\end{cases}$
2) Ta thay họ $\mathcal{F}$ bởi $S_{ij}(\mathcal{F})=\{S_{ij}(T):T\in\mathcal{F}\}$
<u>Bổ đề 4:</u>
i) $|S_{ij}(T)|=|T|$ và $|S_{ij}(\mathcal{F})|=|\mathcal{F}|$
ii) Nếu $\mathcal{F}$ là một họ giao thì $S_{ij}(\mathcal{F})$ cũng là họ giao.
<u>Chứng minh bổ đề 4:</u>
i) Hiển nhiên
ii) Cho $A,B\in\mathcal{F}$, ta có thể kiểm lại được tất cả các trường hợp một cách dễ dàng ngoại trừ $A\cap B=\{j\}$, $i\in A$ và $i\notin B$. Đặt $A_{ij}=(A\setminus\{j\})\cup\{i\}$. Nhận xét rằng : $A_{ij}\cap B=(A\cap B)\setminus\{j\}=\varnothing$. Do $\mathcal{F}$ là họ giao nên ta phải có $A_{ij}\notin\mathcal{F}$. Do đó, $S_{ij}(A)=A_{ij}$ và hiển nhiên $S_{ij}(B)=B_{ij}=(B\setminus\{j\})\cup\{i\}$. Như vậy, $i\in S_{ij}(A)\cap S_{ij}(B)$ nên $S_{ij}(A)\cap S_{ij}(B)\ne\varnothing$.

Bằng cách áp dụng toán tử (i,j) - shift với $0\le i<j\le n-1$ nào đó, bởi vì ta chỉ có thể thay một phần tử bởi một phần tử nhỏ hơn, một lúc nào đó họ tập $\mathcal{F}$ sẽ trở nên bất biến, $S_{ij}(\mathcal{F})=\mathcal{F}$ với mọi $0\le i<j\le n-1$. Khi đó ta nói $\mathcal{F}$ là shift.
Ý tưởng cốt lõi của kỹ thuật shifting rất tự nhiên : Bằng cách áp dụng nhiều lần toán tử shift để đưa một họ giao bất kì về một dạng đặc biệt và ta chỉ cần chứng minh khẳng định của bài toán cho dạng đặc biệt này.

Sử dụng bổ đề 4) ta nhận thấy rằng ta chỉ cần chứng minh định lý Erdos – Ko – Rado cho các họ shift $\mathcal{F}$.
Đầu tiên ta nhận thấy kết quả của khẳng định là hiển nhiên đúng khi $k=1$
Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng khẳng định của bài toán đúng với $n=2k$ như sau: Nhận thấy rằng với mọi $S\in\dbinom{X}{k}$ thì cả hai tập S và $X\setminus S$ cùng nằm trong họ $\dbinom{X}{k}$, nhưng do $\mathcal{F}$ là một họ giao nên họ $\mathcal{F}$ chỉ có thể chứa tối đa một tập trong cặp này.
Do đó, $|\mathcal{F}|\le\dfrac{1}{2}\dbinom{2k}{k}=\dfrac{(2k)!}{2.k!k!}=\dfrac{(2k-1)!}{(k-1)!k!}=\dbinom{2k-1}{k-1}$
Phần việc còn lại của chúng ta là chứng minh khẳng định cho trường hợp $n>2k$ bằng phương pháp quy nạp: giả sử định lý Erdos – Ko – Rado đã được chứng minh với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n.

Đặt $\mathcal{F}_0 = \{S \in \mathcal{F} : n \notin S\}$ và $\mathcal{F}_1 = \{S \in \mathcal{F} : n \in S\}$. Hiển nhiên, $\mathcal{F}_0 \subseteq \binom{[n-1]}{k}$ và $\mathcal{F}_0$ là họ giao. Áp dụng giả thiết quy nạp cho $\mathcal{F}_0$, ta được $|\mathcal{F}_0| \le \binom{n-2}{k-1}$.

Đặt $\mathcal{F}_1' = \{S \setminus \{n\} : S \in \mathcal{F}_1\}$, hiển nhiên $\mathcal{F}_1' \in \binom{[n-1]}{k-1}$. Ta khẳng định rằng $\mathcal{F}_1'$ là họ giao.

Thật vậy, giả sử phản chứng $\mathcal{F}_1'$ không phải là một họ giao nên ta có thể tìm được $A, B \in \mathcal{F}$ sao cho $A \cap B = \{n\}$, điều này có nghĩa là $|A \cup B| \le 2k-1 < n-1$. Do đó ta tìm được số $0 \le i \le n-1$ sao cho $i \notin A \cup B$. Do $\mathcal{F}$ là shift nên $A_{in} = (A \setminus \{n\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$ và $B_{in} = (B \setminus \{n\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$. Mặt khác ta có thể kiểm tra được rằng $A_{in} \cap B_{in} = \varnothing$, mâu thuẫn với việc $\mathcal{F}$ là một họ giao.

Tổng hợp các kết quả trên lại và áp dụng giả thiết quy nạp cho $\mathcal{F}_1'$:

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1'| \le \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}$$

<u>Tài liệu tham khảo :</u>

[1]. Wikipedia, Combinatorics (Fall 2010)/Extremal set theory , ??/??/??
[2]. Trương Phước Nhân, Tiếp cận định lý Erdos – Ko – Rado bằng kỹ thuật shifting, 09/02/2018
[3]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp, 17/07/2018
[4]. Trương Phước Nhân, Định lý Erdos – Ko – Rado, 03/02/2018