

Lý thuyết cực trị tập hợp – phần 2

Trương Phước Nhân, 11/02/2018

Bổ đề Sauer và số chiều VC :

Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ là một họ tập và một tập con $R \subseteq X$.

Vết $\mathcal{F}|_R$ của họ $\mathcal{F}$ trên tập R được định nghĩa là $\mathcal{F}|_R = \{S \cap R : S \in \mathcal{F}\}$. Ta nói rằng $\mathcal{F}$ shatter R nếu $\mathcal{F}|_R = 2^R$, có nghĩa là với mọi $T \subseteq R$ ta luôn tìm được một tập $S \in \mathcal{F}$ sao cho $T = S \cap R$.

Số chiều Vapnik – Chervonenkis (số chiều VC) của một họ tập $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, kí hiệu $VC - \dim(\mathcal{F})$, là kích thước lớn nhất có thể có của một tập $R \subseteq X$ được shatter bởi $\mathcal{F}$.

Với mỗi tập con $S \subseteq X$ ta có thể đại diện tập này bởi hàm đặc trưng của nó $f_S : X \rightarrow \{0,1\}$ thỏa mãn

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}. \text{ Khi đó một họ tập } \mathcal{F} \subseteq 2^X \text{ tương đương với một họ hàm Boolean } \{f_S : S \in \mathcal{F}\}.$$

Trong một số vấn đề của toán học ứng dụng ta cần tìm tập con $Y \subseteq X$ lớn nhất sao cho họ $\mathcal{F}$ chứa tất cả $2^{|Y|}$ hàm Boolean $f : Y \rightarrow \{0,1\}$. Theo cách ta định nghĩa ở trên thì kích thước của tập con lớn nhất thỏa mãn điều kiện vừa nêu chính là số chiều VC.

Theo cách ta định nghĩa thì số chiều VC liên quan đến bài toán liệt kê tất cả các tập con điều này gây cho ta rất nhiều khó khăn trong quá trình phân tích tổng quát. Nhưng thật may mắn là Sauer đã cho ta một điều kiện đơn giản để đánh giá cận dưới của số chiều VC như sau :

Bổ đề Sauer :

Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ với $|X| = n$. Nếu $|\mathcal{F}| > \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i}$ thì tồn tại một tập $R \in \binom{X}{k}$ sao cho $\mathcal{F}$ shatter R

Nói cách khác, với mọi họ tập $\mathcal{F}$ sao cho $|\mathcal{F}| > \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i}$ thì số chiều VC của nó thỏa $VC - \dim(\mathcal{F}) \geq k$.

Một điểm đáng lưu ý cho phân tích của chúng ta là bổ đề Sauer đặc biệt dễ chứng minh cho một lớp các họ tập đặc biệt được gọi là hereditary được định nghĩa như sau :

Một họ tập $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ được gọi là *hereditary* nếu $S \subseteq T \in \mathcal{F}$ kéo theo $S \in \mathcal{F}$.

Nói một cách khác, với một họ hereditary $\mathcal{F}$, nếu $R \in \mathcal{F}$ thì tất cả các tập con của R cũng đều thuộc họ $\mathcal{F}$. Do đó ta có một kết quả hiển nhiên sau :

Kết quả 1: Cho $\mathcal{F}$ là một họ hereditary. Nếu $R \in \mathcal{F}$ thì $\mathcal{F}$ shatters R

Do đó ta rất dễ dàng kiểm tra lại bổ đề Sauer cho các họ hereditary và ta có kết quả là :

Kết quả 2:

Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ với $|X| = n$. Nếu $\mathcal{F}$ là một họ hereditary và $|\mathcal{F}| > \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i}$ thì tồn tại một tập $R \in \binom{X}{k}$ sao cho $\mathcal{F}$ shatter

Chứng minh : Do $\mathcal{F}$ là một họ hereditary nên ta cần chỉ ra một tập $R \in \mathcal{F}$ sao cho $|R| \geq k$, nhưng ta nhận thấy điều này là đúng bởi vì nếu ta giả sử phản chứng rằng tất cả các thành viên của họ $\mathcal{F}$ đều có kích thước $< k$ thì khi đó $|\mathcal{F}| \leq \sum_{1 \leq i \leq k-1} \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i}$, mâu thuẫn với giả thiết.

Để kiểm tra lại bổ đề Sauer cho trường hợp tổng quát ý tưởng tự nhiên nhất ta sử dụng kĩ thuật shifting làm “giảm” họ tập hợp để thu được một họ hereditary.

Nhận xét rằng trong bài toán này ta làm việc với $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ thay vì $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ như trong chứng minh của định

lý Erdos – Ko – Rado nên ta không cần phải bảo toàn kích thước của các thành viên. Thay vào đó chúng ta cần làm giảm một họ bất kì thành một họ hereditary nên ta sử dụng một toán tử shift thay thế một thành viên bởi một tập con của nó như sau :

Cho $\mathcal{F} \subseteq 2^X$, và $i \in [n]$. Ta xây dựng toán tử down – shift S_i như sau:

1) Với mỗi tập $T \in \mathcal{F}$ ta thay bằng tập $S_i(T) = \begin{cases} T \setminus \{i\} & \text{nếu } i \in T \text{ và } T \setminus \{i\} \notin \mathcal{F} \\ T & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$

2) Thay họ $\mathcal{F}$ bằng họ mới $S_i(\mathcal{F}) = \{S_i(T) : T \in \mathcal{F}\}$

Bằng cách áp dụng liên tiếp toán tử S_i vào họ $\mathcal{F}$ với mọi $i \in [n]$, sau một số hữu hạn bước $\mathcal{F}$ sẽ trở nên bất biến, nghĩa là $S_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ với mọi $i \in [n]$. Khi đó ta gọi họ này down- shift. Dễ dàng nhận thấy rằng một họ $\mathcal{F}$ là down-shift thì cũng là hereditary nên ta có kết quả sau :

Kết quả 3: Nếu họ $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ là down – shift thì $\mathcal{F}$ là hereditary

Để có thể áp dụng được kỹ thuật shifting chứng minh bổ đề Sauer ta cần đảm bảo rằng toán tử down – shift không làm giảm $|\mathcal{F}|$ và đồng thời không làm tăng số chiều Vapnik – Chervonenkis $VC - \dim(\mathcal{F})$ sau :

Kết quả 4:

i) $|S_i(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$

ii) $|S_i(\mathcal{F})|_R \leq |\mathcal{F}|_R$, do đó nếu $S_i(\mathcal{F})$ shatter tập R thì $\mathcal{F}$ cũng shatter $\mathcal{F}$

Chứng minh :

i) Hiển nhiên

ii) Từ định nghĩa của toán tử down – shift và vết ta suy ra : $S_i(\mathcal{F})|_R \subseteq S_i(\mathcal{F}|_R)$. Áp dụng hệ thức i) ta suy ra đánh giá cần chứng minh.

Chứng minh bổ đề Sauer cho trường hợp chung:

Với mọi tập $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$, bằng cách áp dụng liên tục toán tử S_i với mọi $i \in [n]$ cho họ $\mathcal{F}$ ta sẽ thu được một họ down – shift, mà ta sẽ kí hiệu là $\mathcal{F}'$. Từ kết quả 4) ta có $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| > \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i}$ và theo kết quả 3) ta suy ra $\mathcal{F}'$ là hereditary, do đó theo kết quả 2) ta tìm được một tập R có kích thước k được shatter bởi $\mathcal{F}'$. Từ kết quả 4) ta cũng suy ra $|\mathcal{F}'|_R \leq |\mathcal{F}|_R$ nên $\mathcal{F}$ cũng shatter R . Bổ đề Sauer được chứng minh.

Định lý Kruskal – Katona:

Kết quả 5: Cho trước các số nguyên dương m và k , tồn tại duy nhất một cách biểu diễn m dưới dạng

$$m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{m_t}{t} = \sum_{l=t}^k \binom{m_l}{l}, \text{ trong đó } m_k > m_{k-1} > \dots > m_t \geq t \geq 1$$

Phép biểu diễn m như trên được gọi là k - cascade hay k - binomial.

Chứng minh:

Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của phép biểu diễn trên bằng cách trình bày một thuật toán tham lam như sau:

Đầu tiên ta chọn m_k là số nguyên lớn nhất sao cho $\binom{m_k}{k} \leq m$. Tiếp theo ta chọn m_{k-1} là số nguyên lớn nhất

sao cho $\binom{m_{k-1}}{k-1} \leq m - \binom{m_k}{k}$. Ta khẳng định $m_k > m_{k-1}$, giả sử phản chứng $m_{k-1} \geq m_k$ ta sẽ có

$$m \geq \binom{m_k}{k} + \binom{m_k}{k-1} = \binom{m_k+1}{k-1}, \text{ điều này mâu thuẫn với tính cực đại của } m_k. \text{ Tiếp tục thực hiện quá trình này}$$

sau một số hữu hạn bước hoặc là ta tìm được một số m_t với $t \geq 2$ sao cho

$$\binom{m_t}{t} = m - \binom{m_k}{k} - \binom{m_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{m_{t+1}}{t+1} \text{ hoặc ta tìm được số nguyên } m_1 \text{ sao cho}$$

$$\binom{m_1}{1} \leq m - \binom{m_k}{k} - \binom{m_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{m_2}{2} < \binom{m_1+1}{1}, \text{ hay nói cách khác } m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{m_2}{2} + \binom{m_1}{1}.$$

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của biểu diễn nêu trên bằng phương pháp quy nạp theo k

Với $k=1$, m có duy nhất 1- cas biểu diễn là $m = \binom{m}{1}$.

Với $k > 1$. Giả sử rằng với mọi số nguyên dương m ta luôn có duy nhất $(k-1)$ - cascade.

Bây giờ ta giả sử rằng m có hai k - cascade : $m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t} = \binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{b_r}{r}$

Ta khẳng định rằng $a_k = b_k$. Nếu $a_k \neq b_k$, không mất tính tổng quát, giả sử $a_k < b_k$, ta có :

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t} \leq \binom{a_k}{k} + \binom{a_k-1}{k-1} + \dots + \binom{a_k-(k-t)}{t} + \dots + \binom{a_k-k+1}{1} = \binom{a_k+1}{k} - 1, \text{ như vậy ta}$$

có $m < \binom{a_k+1}{k} \leq \binom{b_k}{k} \leq m$. Do đó $a_k = b_k$, áp dụng giả thiết quy nạp $m - \binom{a_k}{k} = m - \binom{b_k}{k}$ có duy nhất

$(k-1)$ - cascade nên ta thu được điều phải chứng minh.

Kết quả 6: (Kruskal – Katona)

Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ với $|\mathcal{F}| = m$ và giả sử m có khai triển k - cascade $m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{m_t}{t}$ trong đó

$$m_k > m_{k-1} > \dots > m_t \geq t \geq 1. \text{ Khi đó : } |\Delta\mathcal{F}| \geq \binom{m_k}{k-1} + \binom{m_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{m_t}{t-1}$$

Trong bài viết này ta trình bày một cách chứng minh rất đơn giản cho định lý Kruskal – Katona bằng kỹ thuật shifting của tác giả Peter Frankl (xem lại bài viết “**Tiếp cận định lý Erdos – Ko – Rado bằng kỹ thuật shifting**” và “**Lý thuyết cực trị tập hợp**”), muốn vậy ta cần phải chỉ ra rằng toán tử shifting không làm tăng kích thước của shadow như sau :

$$\text{Kết quả 6: } |\Delta S_{ij}(\mathcal{F})| \leq |\Delta\mathcal{F}|$$

Chứng minh: Từ định nghĩa của toán tử shift và shadow ta chứng minh được hệ thức: $\Delta S_{ij}(\mathcal{F}) \subseteq S_{ij}(\Delta\mathcal{F})$

$$\text{Do đó : } |\Delta S_{ij}(\mathcal{F})| \leq |S_{ij}(\Delta\mathcal{F})|$$

$$\Rightarrow |\Delta S_{ij}(\mathcal{F})| \leq |\Delta\mathcal{F}| \text{ (do toán tử shift bảo toàn kích thước của một họ tập, nghĩa là } |S_{ij}(\Delta\mathcal{F})| = |\Delta\mathcal{F}|)$$

Chứng minh định lý Kruskal – Katona :

Áp dụng phương pháp lập luận tương tự như trong chứng minh định lý Erdos – Ko – Rado ta nhận thấy rằng ta chỉ cần kiểm lại khẳng định của định lý Kruskal – Katona trong trường hợp họ $\mathcal{F}$ là shift.

Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp cho m và k (trong trường hợp này đã cho trước m). Khẳng định của bài toán là hiển nhiên đúng cho trường hợp $k=1$ và m bất kì.

$$\text{Đặt } \mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} : 1 \notin A\},$$

$$\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} : 1 \in A\},$$

$$\text{và } \mathcal{F}'_1 = \{A \setminus \{1\} : A \in \mathcal{F}_1\}.$$

$$\text{Hiển nhiên } \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \subseteq \binom{X}{k}, \mathcal{F}'_1 \subseteq \binom{X}{k-1} \text{ và } |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}'_1|$$

Phép chứng minh của chúng ta dựa trên ba bổ đề sau :

$$\text{Bổ đề 1: } |\Delta\mathcal{F}| \geq |\Delta\mathcal{F}'_1| + |\mathcal{F}'_1|$$

Chứng minh bổ đề 1:

Nhận thấy $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_1$ và $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'_1$.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_1 &= \left\{ A \in \binom{X}{k-1} : \exists B \in \mathcal{F}_1, A \subset B \right\} \\ &= \left\{ A \in \binom{X}{k-1} : 1 \in A, \exists B \in \mathcal{F}_1, A \subset B \right\} \cup \left\{ A \in \binom{X}{k-1} : 1 \notin A, \exists B \in \mathcal{F}_1, A \subset B \right\} \\ &= \{S \cup \{1\} : S \in \Delta\mathcal{F}'_1\} \cup \mathcal{F}'_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Delta\mathcal{F}_1| = |\Delta\mathcal{F}'_1| + |\mathcal{F}'_1| \text{ (hai họ tập nêu trên phân biệt nhau và giữa hai tập } \{S \cup \{1\} : S \in \Delta\mathcal{F}'_1\} \text{ và } \Delta\mathcal{F}'_1)$$

$$\Rightarrow |\mathcal{F}| \geq |\Delta\mathcal{F}_1| = |\Delta\mathcal{F}'_1| + |\mathcal{F}'_1|$$

Bổ đề 2: Nếu $\mathcal{F}$ là shift thì $\Delta\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}'_1$

Chứng minh bổ đề 2: Thật vậy, nếu $A \in \Delta\mathcal{F}_0$ thì $A \cup \{j\} \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ với mọi số j nào đó, do $\mathcal{F}$ là shift nên nếu ta áp dụng toán tử $(1, j)$ - shift $S_{1,j}$ ta suy ra rằng $A \cup \{1\} \in \mathcal{F}$ hay $A \in \mathcal{F}'_1$.

Bổ đề 3: Nếu $\mathcal{F}$ là shift thì $|\mathcal{F}'_1| \geq \binom{m_k-1}{k-1} + \binom{m_{k-1}-1}{k-2} + \dots + \binom{m_t-1}{t-1}$

Chứng minh bổ đề 3: Giả sử phản chứng, $|\mathcal{F}'_1| < \binom{m_k-1}{k-1} + \binom{m_{k-1}-1}{k-2} + \dots + \binom{m_t-1}{t-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Do } |\mathcal{F}| &= |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}'_1| \text{ nên } |\mathcal{F}_0| = m - |\mathcal{F}'_1| > \left\{ \binom{m_k}{k} - \binom{m_k-1}{k-1} \right\} + \dots + \left\{ \binom{m_t}{t} - \binom{m_t-1}{t-1} \right\} \\ &= \binom{m_k-1}{k} + \dots + \binom{m_t-1}{t}. \\ \Rightarrow |\mathcal{F}_0| &> \binom{m_k-1}{k} + \dots + \binom{m_t-1}{t} \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra : } |\Delta\mathcal{F}_0| > \binom{m_k-1}{k-1} + \dots + \binom{m_t-1}{t-1} > |\mathcal{F}'_1|.$$

Điều này mâu thuẫn với khẳng định của bổ đề 2, $|\mathcal{F}'_1| \geq |\Delta\mathcal{F}_0|$.

Bằng cách áp dụng bổ đề 1, $|\Delta\mathcal{F}| \geq |\Delta\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}'_1|$.

Áp dụng bổ đề 3, $|\mathcal{F}'_1| \geq \binom{m_k-1}{k-1} + \binom{m_{k-1}-1}{k-2} + \dots + \binom{m_t-1}{t-1}$ và bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp ta được

$$|\Delta\mathcal{F}'_1| \geq \binom{m_k-1}{k-2} + \binom{m_{k-1}-1}{k-3} + \dots + \binom{m_t-1}{t-2}$$

Kết hợp các đánh giá trên ta suy ra :

$$\begin{aligned} |\Delta\mathcal{F}| &\geq |\Delta\mathcal{F}'_1| + |\mathcal{F}'_1| \\ &\geq \left[\binom{m_k-1}{k-1} + \binom{m_{k-1}-1}{k-2} + \dots + \binom{m_t-1}{t-1} \right] + \left[\binom{m_k-1}{k-2} + \binom{m_{k-1}-1}{k-3} + \dots + \binom{m_t-1}{t-2} \right] \\ &= \binom{m_k}{k-1} + \binom{m_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{m_t}{t-1} \\ \Rightarrow |\Delta\mathcal{F}| &\geq \binom{m_k}{k-1} + \binom{m_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{m_t}{t-1}. \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng ta có thể mở rộng khái niệm shadow cho các tập con với kích thước bất kì như sau :

r - shadow của họ $\mathcal{F}$ được hiểu là $\Delta_r\mathcal{F} = \{S : |S| = r \text{ và } \exists T \in \mathcal{F}, S \subseteq T\}$

Khi đó ta có định lý Kruskal – Katona ở dạng tổng quát như sau:

Kết quả 7: (Kruskal – Katona)

Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ với $|\mathcal{F}| = m$ và giả sử m có khai triển k - cascade $m = \binom{m_k}{k} + \binom{m_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{m_t}{t}$ trong đó

$m_k > m_{k-1} > \dots > m_t \geq t \geq 1$. Khi đó : $|\Delta_r\mathcal{F}| \geq \binom{m_k}{r} + \binom{m_{k-1}}{r-1} + \dots + \binom{m_t}{t-k+r}$ với mọi $1 \leq r \leq k$.

Chứng minh: Bằng áp dụng liên tục định lý Kruskal – Katona cho $\Delta \mathcal{F}$ và lưu ý rằng với $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ ta có

$$\Delta_r \mathcal{F} = \Delta_{k-r} \Delta \mathcal{F}.$$

Định lý Erdos – Ko – Rado:

Trong bài viết “**Lý thuyết cực trị tập hợp**” ta đã giới thiệu hai cách chứng minh định lý Erdos – Ko – Rado bằng kỹ thuật đếm và kỹ thuật shift đơn giản, trong bài viết này ta sẽ chỉ ra rằng định lý Erdos – Ko – Rado thực ra là một hệ quả thú vị của định lý Kruskal – Katona mà ta vừa chứng minh ở trên và đồng thời cũng thể hiện sức mạnh của định lý Kruskal – Katona.

Kết quả 8 : (Erdos – Ko – Rado)

Cho $\mathcal{F} \subseteq \binom{X}{k}$ với $|X| = n$ và $n \geq 2k$. Nếu $\mathcal{F}$ là họ giao thì $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$

Chứng minh : Giả sử phản chứng, $|\mathcal{F}| > \binom{n-1}{k-1}$.

Ta xây dựng hệ đối ngẫu của hệ $\mathcal{F}$ như sau :

$$\mathcal{G} = \{\bar{S} = X \setminus S : S \in \mathcal{F}\}$$

Với $S, T \in \mathcal{F}$, điều kiện $S \cap T \neq \emptyset$ tương đương với $S \not\subseteq \bar{T}$ nên $\mathcal{F}$ và $\Delta_k \mathcal{G}$ là phân biệt

hay $|\mathcal{F}| + |\Delta_k \mathcal{G}| \leq \binom{n}{k}.$

Hiển nhiên, $|\mathcal{G}| = |\mathcal{F}| > \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}.$

Áp dụng định lý Kruskal – Katona, $|\Delta_k \mathcal{G}| \geq \binom{n-1}{k}$ nên $|\mathcal{F}| + |\Delta_k \mathcal{G}| > \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, mâu thuẫn.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Wikipedia, Combinatorics (Fall 2010)/Extremal set theory II , ??/??/??
- [2]. Trương Phước Nhân, Tiếp cận định lý Erdos – Ko – Rado bằng kỹ thuật shifting, 09/02/2018
- [3]. Trương Phước Nhân, Tối ưu tập hợp, 17/07/2018
- [4]. Trương Phước Nhân, Định lý Erdos – Ko – Rado, 03/02/2018
- [5]. Trương Phước Nhân, Bổ đề Sauer – Shelah, 08/02/2018