$t-$ design

Trương Phước Nhân, 12/02/2018

Cho $S=\{1,2,...,v\}$. Một họ $\mathcal{D}$ gồm các k - tập con của S được gọi là $t-(v,k,\lambda)$ design nếu mọi tập con t - phần tử của S nằm trong chính xác λ thành viên của họ $\mathcal{D}$, trong đó $0<t\le k<v, \lambda>0$. Thông thường ta thường gọi $t-(v,k,\lambda)$ design là $t-$ design.

<u>Kết quả 1:</u> Nếu $\mathcal{D}$ là $t-(v,k,\lambda)$ design và $0<s<t$ thì $\mathcal{D}$ cũng là $s-\left(v,k,\lambda\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}\right)$ design

<u>Chứng minh:</u> Gỉa sử $0\le s<t$ và đặt λ_s là số các khối của họ $\mathcal{D}$ có chứa một s - tập con $A\subseteq S$. Để thực hiện yêu cầu này ta áp dụng kĩ thuật đếm bằng hai cách tập $\{(C,B): B\in\mathcal{D}, A\subseteq C\subseteq B, |C|=t\}$.

Đầu tiên, có $\binom{v-s}{t-s}$ tập con t - phần tử C có chứa A, mỗi tập con như vậy được chứa trong chính xác λ khối $B\in\mathcal{D}$, do đó số cặp là $\lambda\binom{v-s}{t-s}$. Mặt khác, có chính xác λ_s khối B có chứa A và với mỗi khối này ta có $\binom{k-s}{t-s}$ cách để chọn tập C thỏa mãn yêu cầu, nên ta lại có số cặp là $\lambda_s\binom{k-s}{t-s}$.

Như vậy, $\lambda\binom{v-s}{t-s}=\lambda_s\binom{k-s}{t-s}$, có nghĩa là λ_s không phụ thuộc vào cách chọn tập A và luôn bằng $\lambda\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}$.

Lưu ý: Từ kết quả chứng minh của kết quả 1) ta suy ra rằng nếu họ $\mathcal{D}$ là $t-(v,k,\lambda)$ design thì sẽ có họ $\mathcal{D}$ sẽ có $b=\lambda_0=\dfrac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$ khối và mỗi phần tử của tập nền S nằm trong chính xác $r=\lambda_1=\dfrac{\lambda\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}$ khối, hay nói cách khác họ $\mathcal{D}$ là (v,b,r,k,λ)- design (xem bài viết "**<u>BIBD</u>**", "**<u>Lý thuyết cấu hình tổ hợp</u>**").

Một $t-(v,k,1)$ design được gọi là hệ Steiner $S(t,k,v)$.

<u>Kết quả 2:</u> Nếu họ $\mathcal{D}$ là $t-(v,k,\lambda)$ design, với $t\ge 2$ và $i\in S$, thì họ $\mathcal{D}_i=\{B\setminus\{i\}: B\in\mathcal{D}, i\in B\}$ là $(t-1)-(v-1,k-1,\lambda)$ design

<u>Chứng minh:</u> Thật vậy với mọi $(t-1)$ - tập con T của $S\setminus\{i\}$, số các khối của họ $\mathcal{D}_i$ chứa T bằng số các khối của họ $\mathcal{D}$ chứa $T\cup\{i\}$.

Nếu tồn tại một hệ Steiner $S(t,k,v)$ thì theo kết quả2) ta suy ra cũng tồn tại các hệ Steiner $S(t-1,k-1,v-1), S(t-2,k-2,v-2),...,S(1,k-t+1,v-t+1)$. Theo kết quả 1) , hệ thức $\lambda_0=\dfrac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$, tất cả các số $\dfrac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}, \dfrac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}},\ldots,\dfrac{\binom{v-t+1}{1}}{\binom{k-t+1}{1}}$ đều là các số nguyên.

Kết quả 3: Nếu hệ Steiner $S(2,3,v)$ tồn tại thì $v \equiv 1$ hoặc $3 \pmod 6$.

Chứng minh: Áp dụng các phân tích lý thuyết trên ta suy ra $\dfrac{\binom{v}{2}}{\binom{3}{2}} = \dfrac{1}{6}v(v-1)$ và $\dfrac{\binom{v-1}{2}}{\binom{2}{1}} = \dfrac{1}{2}(v-1)$ là các số nguyên. Từ hệ thức $v(v-1) \equiv 0 \pmod 6$ ta suy ra $v \equiv 0,1,3$ hoặc $4 \pmod 6$, và chỉ có $v \equiv 1$ hoặc $3 \pmod 6$ là thỏa mãn hệ thức $v \equiv 1 \pmod 2$.

Kết quả 4:
Nếu tồn tại một $2-(4n-1, 2n-1, n-1)$ - Hadamard design thì đồng thời cũng tồn tại một $3-(4n, 2n, n-1)$ - design

Chứng minh: Giả sử $\mathcal{D}$ là $(4n-1, 2n-1, n-1)$ - Hadamard design và $S = \{1, 2, ..., 4n-1\}$.
Đặt $\mathcal{E} = \{B \cup \{4n\} : B \in \mathcal{D}\}$. Ta khẳng định rằng $\mathcal{E}$ là $3-(4n, 2n, n-1)$ - design. Mỗi khối của $\mathcal{E}$ chứa $2n$ phần tử của tập $S \cup \{4n\}$. Ta cần chỉ ra rằng tất cả các tập con 3 phần tử của $S \cup \{4n\}$ nằm trong chính xác $n-1$ khối của họ $\mathcal{E}$.

Nếu $a, b \in S, a \neq b$, thì $\{a, b, 4n\} \subseteq B \cup \{4n\}$ trong đó $B \in \mathcal{D}$ nếu và chỉ nếu $\{a, b\} \subseteq B$, và do đó $\{a, b, 4n\}$ được chứa trong chính xác $n-1$ khối.

Giả sử $a, b, c \in S$ là ba phần tử đôi một phân biệt. Với mỗi $T \subseteq \{a, b, c\}$, kí hiệu n_T là số các khối của họ $\mathcal{D}$ chứa T và N là số các khối $B \in \mathcal{D}$ sao cho $B \cap \{a, b, c\} = \varnothing$. Khi đó số các khối $B \cup \{4n\}$ của $\mathcal{E}$ có chứa $\{a, b, c\}$ là $N + n_{\{a,b,c\}}$. Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ, ta có:

$$\begin{aligned} N &= b - \left(n_{\{a\}} + n_{\{b\}} + n_{\{c\}}\right) + \left(n_{\{a,b\}} + n_{\{b,c\}} + n_{\{c,a\}}\right) - n_{\{a,b,c\}} \\ &= b - 3r + 3\lambda - n_{\{a,b,c\}} \\ &= 4n - 1 - 3(2n-1) + 3(n-1) - n_{\{a,b,c\}} \\ &= n - 1 - n_{\{a,b,c\}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N + n_{\{a,b,c\}} = n - 1$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Ian Anderson, Ashort Course in Combinatorial Designs, ??/??/2012
[2]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018
[3]. Trương Phước Nhân, Design, 22/07/2017
[4]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết cấu hình tổ hợp, 02/02/2018