

## Ma trận liên thuộc của $t$ - design

Trương Phước Nhân, 13/02/2018

Giả sử  $\mathcal{D}$  là một cấu trúc liên thuộc trên tập đỉnh  $V$  và  $t \geq 1$ , ta tiến hành khảo sát cấu trúc  $\mathcal{D}_t$  trên tập các điểm là các tập con  $t$  phần tử của  $V$  và các khối là bản thân các khối của họ  $\mathcal{D}$ , ở đây các  $t$  - tập con được liên thuộc với các khối chứa nó. Ta kí hiệu  $N_t$  là ma trận liên thuộc của  $\mathcal{D}_t$ . Nếu  $\mathcal{D}$  là một complete design trên  $v$  điểm với các khối có kích thước  $k$ , ta sẽ kí hiệu ma trận liên thuộc là  $W_{t,k}(v)$  hoặc thông thường là  $W_{t,k}$ . Bằng phương pháp đếm cơ bản ta thu được kết quả sau :

**Kết quả 1:** Giả sử  $\mathcal{D}$  là  $t$  - design và  $t \geq 2$ . Nếu  $x$  là một điểm trong  $\mathcal{D}$  thì các điểm khác  $x$  và các khối liên thuộc với  $x$  là  $(t-1)$  - design. Hơn nữa, các điểm khác  $x$  và các khối không liên thuộc với  $x$  cũng là  $(t-1)$  - design.

Tiếp theo ta nhận thấy rằng

**Kết quả 2:** Nếu  $\mathcal{D}$  là  $t$  - design và  $s \leq t$ , thì  $\mathcal{D}$  là  $s$  - design

**Chứng minh:** Đầu tiên ta chú ý rằng  $\mathcal{D}$  là  $s$  - design nếu và chỉ nếu tổng các phần tử trên các hàng của  $N_s$  đều bằng nhau, có nghĩa là nếu  $N_s 1 = c1$  với một số  $c$  nào đó. Do  $\mathcal{D}$  là  $t$  - design nên ta có  $N_t 1 = \lambda_t 1$ .

Nếu  $\sigma$  và  $\beta$  lần lượt là các  $s$  - tập con và  $k$  - tập con của  $V$ , thì  $(W_{s,t} N_t)_{\sigma,\beta}$  bằng số các tập con  $t$  phần tử của  $\beta$  có chứa  $\sigma$  nếu  $\sigma \subseteq \beta$ , có  $\binom{k-s}{t-s}$   $t$  - tập con như vậy của  $\beta$ , và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.

Do đó :  $W_{s,t} N_t = \binom{k-s}{t-s} N_s$ . Từ đây áp dụng một số tính toán đại số và kỹ thuật đếm đơn giản ta có thể chỉ ra

$$\begin{aligned} \text{được rằng } W_{s,t} 1 &= \binom{v-s}{t-s} 1, \text{ trong đó } s \text{ là số phần tử của tập nền nên : } W_{s,t} N_t 1 = \binom{k-s}{t-s} N_s 1 \\ &\Rightarrow \lambda_t W_{s,t} 1 = c \binom{k-s}{t-s} 1 \\ &\Rightarrow \lambda_t \binom{v-s}{t-s} 1 = c \binom{k-s}{t-s} 1 \\ &\Rightarrow c = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s} \end{aligned}$$

Từ kết quả 2) vừa thu được ta suy ra ngay kết quả sau như một hệ quả tầm thường:

**Kết quả 3:** Nếu  $t \leq k \leq v-t$  thì các hàng của ma trận  $W_{t,k}$  là độc lập tuyến tính.

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra một ứng dụng thú vị của kết quả 3) để mở rộng bất đẳng thức Fisher cho các BIBD cho các  $t$  - design.

**Kết quả 4: (Dạng mở rộng của bất đẳng thức Fisher)**

Nếu  $\mathcal{D}$  là  $t$  - design với  $b$  khối trên  $v$  điểm thì  $b \geq \left\lceil \frac{v}{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor} \right\rceil$

**Chứng minh:** Nếu ta đặt  $N_i$  là ma trận liên thuộc của các tập con  $i$  phần tử với các khối,  $2i \leq t$ . Khi đó bằng cách áp dụng kỹ thuật đếm và tính toán đại số cơ bản, tương tự như kết quả 2, ta nhận thấy rằng phần tử ở vị trí  $(\alpha, \beta)$  của ma trận  $N_i N_i^T$  bằng  $\lambda_{|\alpha \cup \beta|}$ , số các khối của họ  $\mathcal{D}$  có chứa một  $|\alpha \cup \beta|$  - tập con của tập nền. Như vậy, bằng lý luận tương tự như kết quả 2) ta suy ra  $\frac{1}{\binom{v-i}{k-i}} W_{i,k} W_{i,k}^T = \frac{1}{\lambda_i} N_i N_i^T$ . Do các hàng của ma

trận  $W_{i,k}$  là độc lập tuyến tính, sử dụng kết quả 3), nên các hàng của ma trận  $N_i$  cũng độc lập tuyến tính, từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

**Tài liệu tham khảo:**

- [1]. Ian Anderson, Ashort Course in Combinatorial Designs, ??/??/2012
- [2]. Trương Phước Nhân, t- design, 12/02/2018