

Bài toán đếm các cấu hình đối xứng

Trương Phước Nhân, 15/02/2018

1. Đặt vấn đề:

Bài toán 1: Xét một hàng năm ô vuông như sau :



Hỏi có bao nhiêu cách tô màu các ô vuông bằng n màu cho trước ?

Do mỗi ô vuông có thể được tô bằng một màu bất kì trong số n màu, nên có tất cả n^5 cách tô màu tất cả.

Ví dụ :

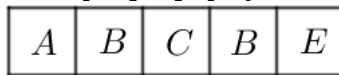


trong đó A, B, C, D, E là năm màu nào đó.

Bây giờ ta giả sử rằng ta được phép xoay hàng năm ô vuông này 180° , và hai cách tô màu được coi là tương đương nhau nếu ta có thể thu được cách tô màu này từ cách tô màu kia bằng phép quay 180° .

Một phân tích ngây thơ mà ta có thể nghĩ ra cho việc đếm số các cách tô màu không tương đương trong trường hợp này là do mỗi phép tô màu đều tương đương với chính xác một phép tô màu khác nên số phép tô màu không tương đương là $\frac{n^5}{2}$. Rõ ràng lý luận này là không đúng bởi vì $\frac{n^5}{2}$ không phải luôn luôn là một

số nguyên. Vấn đề ở đây là có một số phép tô màu sẽ không bị thay đổi qua phép quay 180° , và thật vậy phép tô màu sau chính là phép tô màu bất biến qua phép quay mà ta đề cập đến :



trong đó A, B, C là ba màu nào đó. Dễ dàng tính toán được rằng tất cả n^3 cách tô màu bất biến qua phép quay 180° .

Do đó:

$$\begin{aligned}\text{Số cách tô màu không tương đương} &= \frac{1}{2} \text{ Số phép tô màu bị thay đổi qua phép quay } 180^\circ \\ &+ \text{ Số phép tô màu không bị thay đổi qua phép quay } 180^\circ \\ &= \frac{1}{2}(n^5 - n^3) + n^3 \\ &= \frac{1}{2}(n^5 + n^3)\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta xét theo một ví dụ cũng khá thú vị về chủ đề tô màu các cấu hình có tính chất đối xứng sau

Bài toán 2: Xét một bảng ô vuông kích thước



Hỏi có bao nhiêu cách để ta có thể tô màu các ô vuông của bảng trên bằng các màu xanh, đỏ, vàng ?

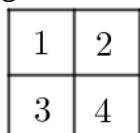
Trước khi đi sâu vào giải quyết vấn đề trên ta sẽ khái quát quá dạng chung của các bài toán này như sau:

Cho X là một tập hữu hạn, G là một nhóm con của nhóm đối xứng S_X và C là một tập khác (có thể vô hạn) mà ta gọi là tập các “màu”. Một *phép tô màu* của X là một hàm $f : X \rightarrow C$. Ta sẽ nói hai phép tô màu f và g là tương đương nhau, kí hiệu $f \sim g$, nếu như ta tìm được một phần tử $\pi \in G$ sao cho

$g(\pi(x)) = f(x)$ với mọi $x \in X$. Ta có thể viết lại điều kiện này một cách ngắn gọn hơn như sau $\pi.g = f$.

Mục đích của chúng ta là nghiên cứu các thức để xác định số các phép tô màu không tương đương nhau ?

Trong bài toán của ta X là tập bốn ô vuông của một bàn cờ kích thước 2×2 được đánh số:



Đặt $C = \{r, b, y\}$ là tập các màu đỏ, xanh, vàng.

Một phép tô màu của X khi đó sẽ có dạng, một ví dụ,

r	b
y	r

Cách tô màu trên tương ứng với hàm $f : X \rightarrow C$ cho bởi $f(1)=r, f(2)=b, f(3)=y, f(4)=r$.

Có nhiều cách khác nhau để ta có thể định nghĩa sự tương đương của hai phép tô màu hay nói cách khác là chọn ra một nhóm các hoán vị G . Trên thực tế ta quan tâm xem xét đến các nhóm đối xứng sau:

1) G_1 chỉ bao gồm hoán vị đồng nhất $(1)(2)(3)(4)$, hai phép tô màu được coi là tương đương nếu chúng bằng nhau theo nghĩa thông thường.

2) G_2 là nhóm sinh bởi hai phần tử $(1)(2)(3)(4)$ (phần tử đơn vị) và $(1,2)(3,4)$ (phần tử đối xứng thẳng đứng), hai phép tô màu được coi là tương đương nếu ta có thể thu được phép tô màu này từ phép tô màu kia bằng cách lấy đối xứng theo chiều thẳng đứng.

3) G_3 là nhóm sinh bởi hai phần tử $(1)(2)(3)(4)$ (phần tử đơn vị) và $(1)(4)(2,3)$ (phần tử đối xứng chéo), hai phép tô màu được coi là tương đương nếu ta có thể thu được phép tô màu này từ phép tô màu kia bằng cách lấy đối xứng qua đường chéo chính của bảng.

4) G_4 là nhóm cyclic bậc 4 gồm các phần tử $(1)(2)(3)(4)$, $(1,2,4,3)$, $(1,4)(2,3)$ và $(1,3,4,2)$, hai phép tô màu được coi là tương đương nếu ta có thể thu được phép tô màu này từ phép tô màu kia bằng một phép quay.

5) G_5 là nhóm dihedral gồm 8 phần tử: 4 phần tử của G_4 và 4 phần tử đối xứng $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1)(4)(2,3)$ và $(2)(3)(1,4)$, hai phép tô màu được xem là tương đương nhau nếu ta có thể thu được phép tô màu này từ phép tô màu kia thông qua một phép quay hoặc một phép đối xứng

6) G_6 là nhóm đối xứng gồm tất cả 24 hoán vị của X . Mặc dù vậy nhưng nhóm G_6 không có quá nhiều sự liên hệ hình học với cấu trúc biểu diễn của X .

Bây giờ ta xem xét số các phép tô màu không tương đương của X , để đơn giản trong quá trình phân tích và các lý luận ta giới hạn trong điều kiện sử dụng hai lần màu đỏ và hai lần màu xanh và vàng mỗi màu chỉ một lần.

G1) Có tất cả 12 cách tô màu các phần tử của X với 2 ô vuông màu đỏ, 1 ô vuông màu xanh, và 1 ô vuông màu vàng, và tất cả các phép tô màu này đều không tương đương nhau theo nhóm G_1 .

G2) Có 6 lớp không tương đương được đại diện bởi các phép tô màu :

r	r	r	b	r	y	b	y	r	b	r	y
b	y	r	y	r	b	r	r	y	r	b	r

Mỗi lớp tương đương này chứa 2 phần tử

G3) Có 7 lớp như sau:

r	r	r	r	b	y	y	b	r	b	b	r	y	r
b	y	y	b	r	r	r	r	y	r	r	y	r	b

Năm lớp đầu mỗi lớp chứa hai phần tử và hai lớp cuối mỗi lớp chỉ chứa một phần tử. Mặc dù G_2 và G_3 có cùng cấu trúc trừu tượng của một nhóm hoán vị nhưng chúng có các cấu trúc khác nhau. Phần tử sinh $(1,2)(3,4)$ của G_2 có hai chu trình độ dài một, trong khi phần tử sinh $(1)(4)(2,3)$ của nhóm G_3 có hai chu trình độ dài một và một chu trình độ dài hai chính điều này là nguyên nhân của sự khác biệt về cấu trúc của hai nhóm G_2 và G_3 mà ta quan sát thấy trong bài toán.

G4) Có 3 lớp tương đương, mỗi lớp chứa 4 phần tử.

r	r	r	r	r	b
y	b	b	y	y	r

G5) Có hai lớp tương đương :

r	r
b	y

r	b
y	r

Lớp đầu chứa 8 phần tử còn lớp sau chứa 4 phần tử.

G6) Tất cả các hoán vị của các ô vuông đều có chính xác một phần tử tương đương, với tất cả 12 phép tô màu.

Mục đích chính của chúng ta là đếm số lượng các lớp tương đương của các phép tô màu trong đó ta sử dụng mỗi màu một số lần nhất định. Chúng ta sẽ đưa các thông tin của bài toán vào một hàm sinh – một đa thức có các hệ số chính là đáp án cần tìm. Để đơn giản ta xét tập X , nhóm $G = G_5$ (nhóm dihedral), và tập $C = \{r, b, y\}$ các màu như trong bài toán mà ta xét ở trên. Đặt $\kappa(i, j, k)$ là số các phép tô màu không tương đương sử dụng i lần màu đỏ, j lần màu xanh, và k lần màu vàng. Ta xem các màu r, b, y như các biến, và xét đa thức

$$F_G(r, b, y) = \sum_{i+j+k=4} \kappa(i, j, k) r^i b^j y^k$$

Bằng phương pháp liệt kê ta dễ dàng nhận ra được rằng :

$$F_G(r, b, y) = (r^4 + b^4 + y^4) + (r^3b + rb^3 + r^3y + ry^3 + b^3y + by^3) + 2(r^2b^2 + r^2y^2 + b^2y^2) + 2(r^2by + rb^2y + rby^2)$$

Nhận xét: $F_G(r, b, y)$ là một hàm đối xứng theo các biến r, b, y (có nghĩa là hàm số này không bị thay đổi nếu ta hoán đổi vị trí của các biến theo một cách nào đó bất kỳ). Bằng cách đặt $r = b = y = 1$ trong

$$F_G(r, b, y), \text{ thu được } F_G(1, 1, 1) = 3 + 6 + 2.3 + 2.3 = 21 \text{ là tổng số phép tô màu không tương đương.}$$

Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát vấn đề khi ta sử dụng n màu $r_1, r_2, \dots, r_n$. Ta có năm trường hợp khác nhau để tiến hành phải xét đến như sau :

- Tất cả bốn ô vuông đều được tô bằng cùng một màu
- Một màu được sử dụng ba lần và một màu khác được sử dụng một lần
- Hai màu được sử dụng, mỗi màu được sử dụng chính xác hai lần
- Một màu được sử dụng hai lần và sử dụng thêm hai màu khác
- Sử dụng bốn màu khác nhau

Khi đó bằng cách áp dụng lối lý luận tương tự như khi ta phân tích trường hợp riêng của bài toán ta tính được hàm sinh của bài toán là :

$$F_G(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_i r_i^4 + \sum_{i \neq j} r_i^3 r_j + 2 \sum_{i < j} r_i^2 r_j^2 + 2 \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq k \\ j < k}} r_i^2 r_j r_k + 3 \sum_{i < j < k < l} r_i r_j r_k r_l$$

Bằng cách cho tất cả các biến bằng 1 (để thu được tổng số tất cả các phép tô màu bằng n màu) thì

$$F_G(1, 1, \dots, 1) = n + n(n-1) + 2 \binom{n}{2} + 2n \binom{n-1}{2} + 3 \binom{n}{4} = \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

Chú ý rằng đa thức trên có một số tính chất quan trọng sau: mẫu số bằng 8 bằng với cấp của nhóm G_5 , và hệ số của n^i dưới mẫu số bằng số các hoán vị của trong nhóm G_5 với chính xác i chu trình.

2. Giải quyết bài toán tổng quát:

Đặt $G_x = \{\pi \in G : \pi.x = x\}$, dễ dàng kiểm tra được G_x là một nhóm con của G bằng cách kiểm lại các tiên đề, là nhóm con ổn định của x và $Gx = \{\pi.x : \pi \in G\}$ là quỹ đạo của hoán vị π .

Kết quả 1: $|G| = |Gx| |G_x|$

Chứng minh: Áp dụng định lý Lagrange trong lý thuyết nhóm ta suy ra được rằng $|G| = |G : G_x| |G_x|$.

Theo chứng minh của định lý Lagrange ta biết được nhóm G được phân hoạch thành các lớp kề trái theo nhóm G_x , $G = \pi_1 G_x \cup \dots \cup \pi_k G_x$ trong đó $\pi_i G_x \cap \pi_j G_x = \emptyset$ với $i \neq j$.

Ta chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : \{\pi_1 G_x, \dots, \pi_k G_x\} \rightarrow Gx$ biến $\pi_i G_x$ thành $\pi_i.x$ là một song ánh. Thật vậy, nếu $\varphi(\pi_i G_x) = \varphi(\pi_j G_x)$ thì $\pi_i.x = \pi_j.x$ nên $(\pi_j^{-1} \pi_i).x = x$ hay $\pi_j^{-1} \pi_i \in G_x$. Như vậy, $\pi_i G_x = \pi_j G_x$.

Mặt khác, với mọi $\pi \in G$ phải thuộc một $\pi_i G_x$ nào đó nên $\pi = \pi_i \eta$ với $\eta \in G_x$.

Do đó, $\pi.x = (\pi.\eta).x = \pi_i.(\eta.x) = \pi_i.x$.

Tóm lại, ta có $|Gx| = |G : G_x|$.

Kết quả 2: (Bổ đề Burside) Cho X là một tập hữu hạn và G là một nhóm con của S_X . Với mỗi $\pi \in G$, đặt $Fix(\pi) = \{x \in X : \pi.x = x\}$. Khi đó, số quỹ đạo bằng $\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)|$

Chứng minh: Với mỗi $x \in G$ đặt $G_x = \{\pi \in G : \pi.x = x\}$ (tập các hoán vị cố định x). Khi đó :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{\substack{x \in X \\ \pi.x = x}} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \sum_{\pi \in G} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x|$$

Sử dụng kết quả 1), $|G| = |Gx| |G_x|$.

$$\text{Vì thế } \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \text{số các quỹ đạo}$$

Kết quả 3:

Cho G là một nhóm các hoán vị của một tập hữu hạn X . Khi đó, số $N_G(n)$ các phép tô n -màu không tương đương nhau theo G của tập X là $N_G(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)}$, trong đó $c(\pi)$ là số chu trình của hoán vị π

Chứng minh: Đặt $\mathcal{C}_n$ là tập gồm các phép tô n -màu của X và C là tập n màu. Gọi π_n là tác động của $\pi \in G$ lên tập $\mathcal{C}_n$. Nếu $f : X \rightarrow C$ là một phép tô màu được cố định bởi π , thì với mọi $x \in X$ ta có $f(x) = \pi_n.f(x) = f(\pi(x))$. Do đó $f(x) = f(\pi^k(x))$ với mọi $k \geq 1$. Như vậy để thu được $f \in Fix(\pi)$, ta có thể chọn các chu trình $\sigma_1, \dots, \sigma_{c(\pi)}$ của π và tiến hành tô màu các phần tử của σ_i bởi cùng một màu. Bởi vì có n cách để tô màu cho mỗi σ_i , nên có $n^{c(\pi)}$ phép tô màu được cố định bởi π , hay $|Fix(\pi_n)| = n^{c(\pi)}$. Áp dụng bổ đề Burnside ta suy ra $N_G(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi_n)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)}$.

Bây giờ ta không chỉ muốn đếm tổng số các phép tô n -màu không tương đương mà còn muốn xác định thêm số phép tô màu trong đó mỗi màu được sử dụng với một lượng nhất định. Muốn thực hiện yêu cầu này ta không chỉ cần quan tâm đến số $c(\pi)$ các chu trình của mỗi $\pi \in G$ mà còn phải quan tâm đến độ dài của mỗi chu trình của π .

Cho trước một hoán vị π của một tập X có n phần tử, ta định nghĩa *loại* của π là $type(\pi) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, trong đó c_i là số lượng các chu trình độ dài i của hoán vị π .

Cho một hoán vị π với loại $type(\pi) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ta định nghĩa *chỉ số chu trình* của π là đơn thức $Z_\pi = z_1^{c_1} z_2^{c_2} \dots z_n^{c_n}$.

Bây giờ, cho trước một nhóm con G của S_X , chỉ số chu trình của G được định nghĩa là

$$Z_G = Z_G(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi, \text{ nên } Z_G \text{ là một đa thức theo các biến } z_1, \dots, z_n.$$

Kết quả 3: (Định lý Polya) Cho G là một nhóm các phép hoán vị của tập X gồm n phần tử và $C = \{r_1, r_2, \dots\}$ là tập các màu. Kí hiệu $\kappa(i_1, i_2, \dots)$ là số các phép tô n -màu không tương đương (dưới tác động của G) sao cho màu r_j được sử dụng i_j lần. Đặt $F_G(r_1, r_2, \dots) = \sum_{i_1, i_2, \dots} \kappa(i_1, i_2, \dots) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$

$$\text{Khi đó : } F_G(r_1, r_2, \dots) = Z_G(r_1 + r_2 + r_3 + \dots, r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots, \dots, r_1^j + r_2^j + r_3^j + \dots, \dots)$$

Chứng minh: Đặt $|X| = n$ và $i_1 + i_2 + \dots = n$ trong đó $i_j \geq 0$. Kí hiệu $i = (i_1, i_2, \dots)$ và gọi $\mathcal{C}_i$ là tập tất cả các phép tô màu của X trong đó màu r_j được sử dụng i_j lần, π_i là tác động của $\pi \in G$ lên $\mathcal{C}_i$.

Khi đó để $f \in Fix(\pi)$, ta phải tô màu tập X sao cho :

a) Trong mỗi chu trình của π , tất cả các phần tử được tô cùng màu

b) Màu r_j xuất hiện i_j lần.

Xét hàm : $H_\pi = \prod_j (r_1^j + r_2^j + \dots)^{c_j(\pi)}$, trong đó $c_j(\pi)$ là số các chu trình của π có độ dài j .

Bằng cách khai triển hàm H_π thành tổng các đơn thức $r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$, ta nhận xét rằng một đơn thức như vậy thu được bằng cách chọn một số hạng r_k^j từ mỗi nhân tử của H_π và nhân các số hạng lại với nhau. Chọn một số hạng r_k^j tương ứng với việc tô màu tất cả các phần tử của một chu trình độ dài j bằng màu r_k . Bởi vì mỗi hạng tử $r_1^j + r_2^j + \dots$ xuất hiện chính xác $c_j(\pi)$ lần trong H_π , chọn một số hạng r_k^j từ mỗi nhân tử tương ứng với việc tô màu tập X sao cho mỗi chu trình đều là đơn sắc, nghĩa là tất cả các phần tử của cùng một chu trình đều được tô bởi cùng một màu. Tích của các số hạng r_k^j sẽ là đơn thức $r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$, trong đó ta sử dụng màu r_k chính xác j_k lần. Điều đó suy ra rằng hệ số của số hạng $r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$ trong H_π bằng $|Fix(\pi_i)|$.

$$\text{Do đó : } H_i = \sum_i |Fix(\pi_i)| r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots (*)$$

Bây giờ ta lấy tổng tất cả các số hạng ở cả hai vế của (*) trên tập tất cả các hoán vị $\pi \in G$ và chia hai vế cho $|G|$ ta nhận được :

Vế trái của biểu thức có dạng

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_j (r_1^j + r_2^j + \dots)^{c_j(\pi)} = Z_G(r_1 + r_2 + r_3 + \dots, r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots, \dots, r_1^j + r_2^j + r_3^j + \dots, \dots)$$

Mặt khác, vế phải của (*) trở thành $\sum_i \left[\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi_i)| \right] r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots$. Áp dụng bổ đề Burnside, xét tác động của nhóm G lên tập $\mathcal{C}_i$, số hạng trong dấu ngoặc bằng với số quỹ đạo của π_i tác động lên $\mathcal{C}_i$, nghĩa là số các phép tô n - màu không tương đương trong đó ta sử dụng màu r_j chính xác i_j lần.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Richard P. Stanley, Topics in algebraic combinatorics, ??/02/2013
- [2]. Ngô Đắc Tân, Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, ??/??/??