

Đa thức sắc số

Trương Phước Nhân, 19/02/2018

Cho đồ thị $G = (V, E)$ với $|V| = n$. Một phép λ -tô màu của đồ thị G là một hàm $f: V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$ sao cho nếu $(x, y) \in E$ thì $f(x) \neq f(y)$. Kí hiệu $P_G(\lambda)$ là số các phép λ -tô màu của đồ thị G .

Kết quả 1:

$P_G(\lambda) = \sum_{U \subseteq E} (-1)^{|U|} \lambda^{c(U)}$, trong đó $c(U)$ là số các thành phần liên thông của đồ thị khung (V, U) .

Chứng minh: Kí hiệu $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ là tập các cạnh của đồ thị G và

$A_i = \{f: V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\} : f(x) = f(y) \text{ trong đó } e_i = (x, y)\}$.

Khi đó số các phép λ -tô màu bằng: $P_G(\lambda) = \lambda^n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$

Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ ta có thể biểu diễn được số phần tử của tập $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ như sau:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{\substack{U \subseteq E \\ U \neq \emptyset}} (-1)^{|U|-1} p(U, \lambda)$$

trong đó $p(U, \lambda)$ biểu diễn số các hàm $f: V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$ nhận cùng giá trị đối với các đầu mút của một cạnh nằm trong U . Điều này có nghĩa là các hàm này nhận các giá trị giống nhau đối với mỗi thành phần liên thông của đồ thị khung (V, U) , do đó $p(U, \lambda) = \lambda^{c(U)}$. Lưu ý ta có thể xem λ^n thu được từ công thức

$p(U, \lambda) = \lambda^{c(U)}$ bằng cách đặt $U = \emptyset$, khi đồ thị (V, U) chỉ chứa các đỉnh cô lập và do đó có n thành phần liên thông.

Đa thức $P_G(\lambda) = \sum_{U \subseteq E} (-1)^{|U|} \lambda^{c(U)}$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là đa thức sắc số của đồ thị G .

Giả sử e là một cạnh của đồ thị G . Ta gọi $G - e$ là đồ thị thu được từ đồ thị G bằng cách xóa cạnh e ; $G|e$ là đồ thị thu được từ G bằng cách xóa đi các đỉnh x và y và các cạnh liên thuộc với các đỉnh này sau đó bổ sung thêm một đỉnh z và nối đỉnh này với tất cả các đỉnh của đồ thị G đã từng liên thuộc với x hoặc y .

Kết quả 2: $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G|e}(\lambda)$

Chứng minh: Nhận xét rằng nếu f là một phép tô λ -màu của đồ thị $G - e$ sao cho $f(x) \neq f(y)$ trong đó $e = (x, y)$ thì f cũng là một phép tô λ -màu của đồ thị G và chiều ngược lại cũng đúng. Điều này khẳng định rằng $P_{G-e}(\lambda) - P_G(\lambda)$ bằng số các phép tô λ -màu f của đồ thị $G - e$ sao cho $f(x) = f(y)$.

Mặt khác, nhận thấy rằng một phép tô λ -màu f của đồ thị $G - e$ sao cho $f(x) = f(y)$ tương ứng với một phép tô λ -màu g của $G|e$ bằng cách đặt $g(z) = f(x) = f(y)$ và $g(t) = f(t)$ với mọi $t \neq z$. Ngược lại, với mỗi phép tô λ -màu g của đồ thị $G|e$ ta cũng có thể cho tương ứng với một phép tô λ -màu f của đồ thị $G - e$ sao cho $f(x) = f(y)$ bằng cách đặt $f(x) = f(y) = g(z)$ và $f(t) = g(t)$ với mọi $t \neq x, y$.

Từ hai phân tích đơn giản trên ta suy ra rằng $P_{G-e}(\lambda) - P_G(\lambda) = P_{G|e}(\lambda)$ với mọi số tự nhiên λ . Từ định lý cơ bản của đại số ta suy ra được rằng hệ thức $P_{G-e}(\lambda) - P_G(\lambda) = P_{G|e}(\lambda)$ cũng sẽ thỏa mãn với mọi số thực λ .

Kết quả 3:

i) $P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)$, trong đó K_n là đồ thị đầy đủ trên n đỉnh

ii) $P_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$, trong đó T_n là cây có n đỉnh

iii) $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)$, trong đó C_n là một chu trình trên n đỉnh với n cạnh

Chứng minh:

i) Giả sử K_n có tập đỉnh $\{x_1, \dots, x_n\}$. Một phép tô λ -tô màu f của K_n thu được bằng cách tô màu đỉnh x_1 bằng một trong λ màu, tô màu đỉnh x_2 bằng một trong $\lambda-1$ màu, ..., tô màu đỉnh x_n bằng một trong $\lambda-n+1$ màu còn lại, do đó ta có $P_{K_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)$ cách khác nhau để xây dựng hàm f .

ii) Giả sử x là một đỉnh có bậc 1 của T_n , và kí hiệu $T_n - x$ là cây thu được từ cây T_n bằng cách xóa đi đỉnh x và các cạnh liên thuộc với x . Nhận xét rằng một phép tô λ - tô màu của cây $T_n - x$ có thể được mở rộng theo $\lambda - 1$ cách khác nhau để thu được một phép tô λ - tô màu của cây T_n , và do đó $P_{T_n}(\lambda) = (\lambda - 1)P_{T_n - x}(\lambda)$.

Bằng cách áp dụng liên tiếp hệ thức trên ta nhận được $P_{T_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^{n-1} P_{T_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$, đa thức sắc số của cây với một đỉnh đơn lẻ bằng λ .

iii) Giả sử e là một cạnh của chu trình C_n . Sử dụng kết quả 2) ta được $P_{C_n}(\lambda) = P_{C_n - e}(\lambda) - P_{C_n | e}(\lambda)$, trong đó $C_n - e$ là một đường đi với n đỉnh còn $C_n | e$ là một chu trình với $n - 1$ đỉnh. Bằng cách lập luận tương tự như trong ii) ta cũng thu được $P_{C_n - e}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$. Do đó, $P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - P_{C_n | e}(\lambda)$.

Bằng cách lặp lại quá trình lý luận trên ta thu được $P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} - \lambda(\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} \lambda(\lambda - 1)$, lưu ý $P_{C_3}(\lambda) = P_{K_3}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda(\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 1)$.

Nhận xét rằng ta có hệ thức $\lambda(\lambda - 1)^{p-1} = (\lambda - 1 + 1)(\lambda - 1)^{p-1} = (\lambda - 1)^p + (\lambda - 1)^{p-1}$ với $2 \leq p \leq n$ nên ta có viết lại biểu thức tính của $P_{C_n}(\lambda)$ như sau :

$$\begin{aligned} P_{C_n}(\lambda) &= (\lambda - 1)^n + (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-1} - (\lambda - 1)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} (\lambda - 1)^2 + (-1)^{n-2} (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^n + (-1)^n (\lambda - 1) \end{aligned}$$

Kết quả 4: Nếu G là một đồ thị với n đỉnh thì đa thức sắc số của nó có dạng

$$P_G(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_1 x \text{ trong đó } a_i \geq 0 \text{ với mọi } i.$$

Chứng minh: Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo số các cạnh của đồ thị G . Với đồ thị gồm n đỉnh cô lập thì ta có $P_G(x) = x^n$, khẳng định của bài toán là hiển nhiên.

Giả sử ta đã chứng minh được tính chất luân phiên thay dấu của các hệ số của đa thức sắc số cho tất cả các đồ thị có n đỉnh và $m \leq p - 1$ cạnh. Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài toán cho mọi đa thức G có n

đỉnh với $p \leq \binom{n}{2}$ cạnh.

$$\text{Gọi } e \text{ là một cạnh của đồ thị } G. \text{ Từ kết quả 2) ta có } P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G|e}(\lambda) \quad (1)$$

Bởi vì các đồ thị $G - e$ và $G | e$ đều có tối đa là $p - 1$ cạnh, áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra được rằng

$$P_{G-e}(x) = x^n - b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} b_1 x$$

và $P_{G|e}(x) = x^{n-1} - c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} c_1 x$ trong đó $b_i, c_i \geq 0$. Thay các kết quả trên vào (1) ta thu được : $P_G(x) = x^n - (b_{n-1} + 1)x^{n-1} + (b_{n-2} + c_{n-2})x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} (b_1 + c_1)x$, điều này chứng minh tính chất thay phiên của dấu các hệ số.

Kết quả 5: Với mọi đồ thị G , đa thức sắc số $P_G(\lambda)$ không có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

$$\text{Hơn nữa, } P_G(\tau + 1) \neq 0 \text{ trong đó } \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Chứng minh:

Nhận xét rằng : nếu đồ thị G có các thành phần liên thông $G_1, \dots, G_m$ thì một phép tô λ - màu có thể được xây dựng trên một thành phần liên thông này một cách độc lập với việc xây dựng trên các thành phần liên thông còn lại. Điều đó chỉ ra rằng $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \dots P_{G_m}(\lambda)$.

Do đó $P_G(\lambda)$ không có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$ nếu và chỉ nếu mỗi đa thức $P_{G_i}(\lambda)$ cũng có tính chất này với $i = 1, \dots, m$. Không mất tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử G là đồ thị liên thông và ta sẽ khẳng định rằng $(-1)^{n-1} P_G(\lambda) > 0$ nếu đồ thị G có n đỉnh và $0 < \lambda < 1$. Ta sẽ chứng minh khẳng định vừa nêu bằng quy nạp theo số các cạnh của đồ thị G . Nếu đồ thị G có $n - 1$ cạnh thì G là một cây nên $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ và khẳng định là hiển nhiên.

Bây giờ ta giả sử rằng khẳng định của bài toán đã được kiểm tra với mọi đồ thị G với $m \geq n - 1$ cạnh. Ta sẽ chỉ ra rằng khẳng định trên cũng đúng với mọi đa thức G với n đỉnh và $m + 1$ cạnh. Nếu G có số cạnh

lớn hơn $n-1$ thì ta luôn tìm được một cạnh e sao cho $G-e$ là một đồ thị liên thông. Đồ thị $G|e$ thu được bằng cách đồng nhất hai đầu mút của cạnh e đồng thời cũng là một đồ thị liên thông; nó có $n-1$ đỉnh và tối đa m cạnh. Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra $(-1)^{n-1} P_{G-e}(\lambda) > 0$ và $(-1)^{n-2} P_{G|e}(\lambda) > 0$ với mọi $0 < \lambda < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Sử dụng kết quả 2) ta thu được } (-1)^{n-1} P_G(\lambda) &= (-1)^{n-1} \{P_{G-e}(\lambda) - P_{G|e}(\lambda)\} \\ &= (-1)^{n-1} P_{G-e}(\lambda) + (-1)^{n-2} P_{G|e}(\lambda) > 0 \text{ với mọi } 0 < \lambda < 1 \end{aligned}$$

Như vậy, $P_G(\lambda)$ không có nghiệm trong khoảng $(0,1)$.

Trường hợp riêng, ta nhận thấy rằng $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0,1)$ nên $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ không phải là một nghiệm của bất kì một đa thức sắc số $P_G(\lambda)$ nào. Bởi vì đa thức sắc số có các hệ số hữu tỉ nên ta suy ra rằng $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \tau + 1$ không phải là nghiệm của bất kì một đa thức sắc số $P_G(\lambda)$ của một đồ thị G nào cả.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Ioan Tomescu, Problem in Combinatorics and Graph theory.
- [2]. Lovasz , Combinatorial problems and exercises, 2nd Edition.
- [3]. Trương Phước Nhân, Nguyên lý chuồng bồ câu, 09/07/2018