

Đánh giá số khối cho một $t-(v, k, 1)$ design

Trương Phước Nhân, 22/02/2018

Một cấu trúc liên thuộc là một bộ ba $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ thỏa mãn :

1. $\mathcal{P}$ là một tập hữu hạn; các phần tử của nó được gọi là các *điểm*.
2. $\mathcal{B}$ là một tập hữu hạn; các phần tử của nó được gọi là các *khối*.
3. $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$; I được gọi là *quan hệ liên thuộc*.

Thay cho cách viết $(p, B) \in I$ ta sẽ kí hiệu đơn giản lại thành $p \in B$, khi đó ta nói là p và B *liên thuộc*.

Nếu hai khối bất kì đều có cùng số điểm liên thuộc thì ta nói cấu trúc liên thuộc là đơn giản. Trong đa số các vấn đề mà ta khảo sát thì ta sẽ xét các khối như các tập con của $\mathcal{P}$ và khi đó ta tiến hành đồng nhất cấu trúc liên thuộc với một hệ tập $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$

Cho $v \geq k \geq t \geq 0$ và $\lambda \geq 1$ là các số nguyên. Một $t-(v, k, \lambda)$ design (hoặc một t - design trên v điểm với các khối có kích thước k và chỉ số λ) là một cấu trúc liên thuộc $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ với :

1. $|\mathcal{P}| = v$
2. $|B| = k$ với mọi $B \in \mathcal{B}$
3. Với mọi tập con T gồm t điểm, có chính xác λ khối liên thuộc với tất cả các điểm của T .

Kết quả: (Tits) Đối với mọi $t-(v, k, 1)$ design không tầm thường, có nghĩa là $v > k > t$, ta luôn có $v \geq (t+1)(k-t+1)$

Chứng minh:

Nhận xét: Do $\lambda = 1$ nên hai khối phân biệt bất kì giao nhau tại tối đa là $t-1$ điểm

Đầu tiên ta chọn ra một tập S gồm $t+1$ phần tử sao cho S không nằm trong bất kỳ khối nào, việc này luôn thực hiện được bởi vì nếu ngược lại thì ta thấy cấu hình trên phải là một $(t+1)-(v, k, 1)$ design theo một kết

quả quen thuộc của lý thuyết cấu hình nó cũng sẽ là một $t-(v, k, \frac{v-t}{k-t})$ design với $0 < \frac{v-t}{k-t} < 1$, vô lý.

Tiếp theo với mỗi $T \subseteq S$, $|T| = t$, có duy nhất một khối B_T chứa T . Theo phân tích vừa mới chỉ ra ở trên thì $k-t$ phần tử còn lại của khối B_T phải nằm trong $\mathcal{P} \setminus S$. Giả sử tồn tại $T' \neq T \subseteq S$ với $|T'| = t$ sao cho

$B_T \cap B_{T'} \neq \emptyset$, khi đó ta dễ dàng tính được $|T \cap T'| = t-1$ nên theo nhận xét ta suy ra

$|B_T \cap B_{T'}| = |T \cap T'| = t-1$ hay nói cách khác B_T và $B_{T'}$ không giao nhau tại điểm nào thuộc $\mathcal{P} \setminus S$.

Như vậy ta có kết quả : $v \geq |S| + \binom{t+1}{t}(k-t) = (t+1) + (t+1)(k-t)$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Stefan H.M. van Zwam, MAT377 – Combinatorial Mathematics, April, 04/2014
- [2]. Trương Phước Nhân, t - design, 12/02/2018