

Tiếp cận bài toán lựa chọn tối ưu dựa trên mô hình hoán vị

Trương Phước Nhân, 02/03/2018

Nội dung của bài toán lựa chọn tối ưu: Một công ty đang có kế hoạch bổ nhiệm n người trẻ cốt cán vào n vị trí trong công ty còn bị bỏ trống và giả sử rằng nhà tuyển dụng đã đánh giá được khả năng a_{ij} làm việc của người thứ i khi làm việc ở vị trí thứ j . Một câu hỏi được đặt ra đó là ta nên chọn lựa như thế nào để có lợi cho công ty nhất?

Đầu tiên để tìm lời giải cho vấn đề trên ta sẽ tiến coi một sự bổ nhiệm nhân sự mới như một hoán vị

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_n \end{pmatrix}$$

với cách hiểu là người thứ i được bổ nhiệm vào vị trí thứ $j_i = \pi(i)$. Như vậy ta dễ dàng nhận thấy được là một sự lựa chọn tối ưu tương ứng với việc $\sum_i a_{i\pi(i)}$. Có tất cả $n!$ khả năng lựa chọn khác nhau nên khi n lớn thì việc thử duyệt tất cả các trường hợp là một điều bất khả thi. Ở đây ta cần đến sự trợ giúp của toán học!

Kết quả: Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n với các phần tử là các số thực.

Khi đó giá trị lớn nhất của tổng $\sum_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$ tính trên tập tất cả các hoán vị π bằng với giá trị nhỏ nhất của tổng

$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$ trên tập tất cả các số u_i ($i=1, \dots, n$) và v_j ($j=1, \dots, n$) sao cho $u_i + v_j \geq a_{ij}$ với mọi i, j . Giá trị chung này đạt được khi $u_i + v_{\pi(i)} = a_{i\pi(i)}$ với mọi $i=1, \dots, n$.

Chứng minh: Cho trước một ma trận $A = (a_{ij})$, ta luôn có thể tìm được các số u_i, v_j thỏa mãn $u_i + v_j \geq a_{ij}$ với mọi i, j bằng cách cho tất cả các giá trị v_i bằng không và mỗi giá trị u_i bằng $\max\{a_{ij}, j=1, \dots, n\}$. Với mỗi hoán vị π , ta có $u_i + v_{\pi(i)} \geq a_{i\pi(i)}$, bằng cách lấy tổng theo các chỉ số i ta chỉ ra được

$$\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \geq \sum_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$$

Từ đây ta thấy giá trị nhỏ nhất m của $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$ tồn tại, và giá trị lớn nhất M của $\sum_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$ tính trên tất cả các hoán vị π thỏa mãn đánh giá $m \geq M$. Ta cần chỉ ra rằng $m = M$.

Đầu tiên ta giả thiết rằng các chỉ số đánh giá a_{ij} đều là các số nguyên. Với một cách chọn các giá trị u và v thỏa mãn đánh giá $u_i + v_j \geq a_{ij}$ với mọi i, j , ta có thể giữ cố định các giá trị v và làm giảm các giá trị u (nếu cần thiết) sao cho với mỗi i luôn có ít nhất một chỉ số j sao cho $u_i + v_j = a_{ij}$.

Với một cách chọn các giá trị u và v và với mỗi $i=1, \dots, n$, ta đặt S_i là tập các chỉ số j sao cho $u_i + v_j = a_{ij}$. Nếu các tập S_i có một SDR $j_1, j_2, \dots, j_n$, khi đó $u_i + v_{j_i} = a_{ij_i}$, thì hoán vị $\pi(i) = j_i, i=1, \dots, n$, cho ta một lời giải của bài toán lựa chọn tối ưu. Trong trường hợp các tập S_i không có SDR thì theo điều kiện Hall ta có thể tìm được k tập S_i với $i \in K$, trong đó K là một tập gồm k chỉ số, sao cho có tối đa là $(k-1)$ chỉ số j phân biệt trong tất cả các tập S_i với $i \in K$. Kí hiệu J là tập con gồm các chỉ số sao cho $j \in J$ nếu và chỉ nếu $j \in S_i$ với một chỉ số $i \in K$ nào đó. Theo điều kiện Hall ta suy ra rằng J chỉ chứa tối đa là $(k-1)$ chỉ số j . Bây giờ ta sẽ tiến hành thay thế các giá trị u và v bởi các giá trị mới, được xác định bởi:

$$u_i^* = \begin{cases} u_i - 1, & i \in K \\ u_i, & i \notin K \end{cases}$$
$$v_j^* = \begin{cases} v_j + 1, & j \in J \\ v_j, & j \notin J \end{cases}$$

Giả sử ta có $t < k$ chỉ số trong J . Khi đó các giá trị mới u_i^* và v_j^* thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n u_i^* + \sum_{j=1}^n v_j^* = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j - k + t,$$

và bởi vì $t < k$ nên tổng các giá trị u và v bị làm giảm đi một lượng là $k - t$. Đồng thời ta cũng kiểm lại được $u_i^* + v_j^* \geq a_{ij}$ với mọi chỉ số i, j . Từ cách ta định nghĩa các giá trị u^* và v^* thì khẳng trên là hiển nhiên đúng trong trường hợp $i \notin K$, trong trường hợp $i \in K$ ta cần xét thêm hai trường hợp con. Nếu $j \in J$ thì ta có $u_i^* + v_j^* = (u_i - 1) + (v_j + 1) = u_i + v_j \geq a_{ij}$. Trong trường hợp $j \notin J$, thì từ cách ta định nghĩa S_i ,

$$\begin{aligned} u_i + v_j &> a_{ij} \\ \Rightarrow u_i + v_j &\geq a_{ij} + 1 \\ \Rightarrow u_i^* + v_j^* &= u_i + v_j - 1 \geq a_{ij} \end{aligned}$$

Nếu điều kiện Hall được thỏa mãn cho các giá trị u và v mới thì ta thu được một lời giải của bài toán lựa chọn. Trong trường hợp ngược lại ta tiếp tục tiến hành thuật toán như đã trình bày ở trên để đi tìm các giá trị

u_i và v_j mới sao cho tổng $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$ bị giảm thực sự nhưng ta vẫn có hệ thức điều kiện $u_i + v_j \geq a_{ij}$ với

mọi i, j . Trong khi các giá trị u và v mà ta lựa chọn ban đầu là các giá trị nguyên và tổng $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$ bị giảm đi một lượng nguyên dương nên sau một số hữu hạn bước thì thuật toán phải bị dừng và lúc này ta sẽ thu được một lời giải của bài toán lựa chọn.

Thuật toán mà ta vừa trình bày cho phép giải quyết bài toán lựa chọn cho trường hợp các giá trị a_{ij} nguyên một cách khá đơn giản, trong trường hợp tổng quát ta thay các giá trị a_{ij} bởi các số nguyên $\overline{a_{ij}}$ trong đó $\overline{a_{ij}} \geq a_{ij} > \overline{a_{ij}} - 1$. Khi đó bằng cách áp dụng thuật toán vừa trình bày ta tìm được hoán vị $j_1, \dots, j_n$ và các số nguyên u_i, v_j sao cho $\overline{a_{1j_1}} + \overline{a_{2j_2}} + \dots + \overline{a_{nj_n}} = \sum u_i + \sum v_j = m_1$ và $u_i + v_j \geq \overline{a_{ij}}$ với mọi i, j . Bây giờ từ cách ta chọn các giá trị $\overline{a_{ij}}$, ta có $a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n} \geq m_1 - n$ và với một hoán vị $j_1, \dots, j_n$ bất kì ta luôn có

$$a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n} \leq \overline{a_{1j_1}} + \overline{a_{2j_2}} + \dots + \overline{a_{nj_n}} \leq m_1$$

Bây ta ta chọn một ra một số nguyên dương N và thay các giá trị a_{ij} bởi $g_N(a_{ij})$, trong đó $g_N(a_{ij})$ là một số hữu tỉ với mẫu số N và thỏa mãn đánh giá $g_N(a_{ij}) \geq a_{ij} > g_N(a_{ij}) - \frac{1}{N}$. Thay qua phép xây dựng như trong trường hợp các giá trị a_{ij} ta xét phép đặt sau:

$$\begin{aligned} u_i^* &= \begin{cases} u_i - \frac{1}{N}, & i \in K \\ u_i, & i \notin K \end{cases} \\ v_j^* &= \begin{cases} v_j + \frac{1}{N}, & j \in J \\ v_j, & j \notin J \end{cases} \end{aligned}$$

Lặp lại quá trình chứng minh như trong phần trước ta tìm được một hoán vị $j_1, \dots, j_n$ và các số hữu tỉ u_i, v_j có mẫu số bằng N sao cho $g_N(a_{1j_1}) + \dots + g_N(a_{nj_n}) = \sum u_i + \sum v_j = m_N$

$$\text{và } u_i + v_j \geq g_N(a_{ij}) \geq a_{ij} \text{ với mọi } i, j$$

Ta cũng có được kết quả tương tự là $a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n} \geq m_N - \frac{n}{N}$, và với mọi hoán vị $f_1, \dots, f_n$ bất kì ta có

$$a_{1f_1} + \dots + a_{nf_n} \leq m_N$$

Hiển nhiên rằng nếu a_{ij} là các số hữu tỉ thì quá trình trên cho ta lời giải của bài toán lựa chọn tối ưu, trong trường hợp ngược lại bằng cách chọn mẫu số N đủ lớn, các đánh giá trên chỉ ra rằng bằng cách tiến qua giới hạn thì ta có thể tìm được lời giải của bài toán lựa chọn, $\sum u_i + \sum v_j = m = M = a_{1j_1} + a_{2j_2} + \dots + a_{nj_n}$.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Marshall Hall, Combinatorial Theory, First Edition
- [2]. Trương Phước Nhân, Bài toán phân việc tối ưu, 06/02/2018